

Espaces normés

Normes

Exercice 1 [00454] [correction]

Soient E un \mathbb{R} espace vectoriel et N_1, N_2 deux normes sur E .

a) On note $B_1 = \{x \in E / N_1(x) \leq 1\}$ et $B_2 = \{x \in E / N_2(x) \leq 1\}$.

Montrer que $B_1 = B_2 \Rightarrow N_1 = N_2$.

b) Même question avec les boules unités ouvertes.

Exercice 2 [03248] [correction]

Soient a_1, \dots, a_n des réels et $N : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$N(x_1, \dots, x_n) = a_1 |x_1| + \dots + a_n |x_n|$$

A quelle condition sur les a_1, \dots, a_n , l'application N définit-elle une norme sur \mathbb{K}^n ?

Exercice 3 [00455] [correction]

Montrer que l'application $N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$N(x_1, x_2) = \sup_{t \in [0,1]} |x_1 + tx_2|$$

est une norme sur \mathbb{R}^2 .

Représenter la boule unité fermée pour cette norme et comparer celle-ci à $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 4 [00456] [correction]

Soient $f_1, \dots, f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continues.

A quelle condition l'application

$$N : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \|x_1 f_1 + \dots + x_n f_n\|_\infty$$

définit-elle une norme sur \mathbb{R}^n ?

Exercice 5 [00457] [correction]

Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On pose

$$\|A\|_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{i,j}|, \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{i,j}|^2} \text{ et } \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} |a_{i,j}|$$

Montrer que $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ définissent des normes sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exercice 6 [00459] [correction]

Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on pose

$$\|A\| = \left(\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^2 \right)^{1/2}$$

Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme matricielle i.e. que c'est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

Exercice 7 [00460] [correction]

Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose

$$\|A\| = \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$$

a) Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

b) Montrer que si λ est valeur propre de A alors $|\lambda| \leq \|A\|$.

Exercice 8 [00461] [correction]

Soient $p > 1$ et $q > 1$ tel que $1/p + 1/q = 1$.

a) Montrer que pour $a, b \geq 0$

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$$

Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose :

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \text{ et } \|y\|_q = \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q}$$

b) Etablir

$$\frac{|x_i y_i|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q}$$

et en déduire

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

c) En écrivant

$$(|x_i| + |y_i|)^p = |x_i| (|x_i| + |y_i|)^{p-1} + |y_i| (|x_i| + |y_i|)^{p-1}$$

justifier

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

d) Conclure que $\|\cdot\|_p$ définit une norme sur \mathbb{K}^n .

Exercice 9 [00462] [correction]

Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $p \geq 1$ on pose

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

Montrer

$$\|x\|_\infty = \lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p$$

Exercice 10 [02639] [correction]

On définit sur $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ une norme par

$$N(f) = \int_0^1 |f(t)| dt$$

a) Soient $a, b \geq 0$ et $u, v > 0$. Etablir que

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 \Rightarrow \frac{1}{u+v} \leq \frac{a}{u} + \frac{b}{v}$$

b) Soient $f, g \in E$ telles que $f, g > 0$. Montrer

$$N((f+g)^{-1}) \leq \frac{N(f)^2 N(f^{-1}) + N(g)^2 N(g^{-1})}{(N(f) + N(g))^2}$$

c) En déduire que

$$N(f+g)N((f+g)^{-1}) \leq \max(N(f)N(f^{-1}), N(g)N(g^{-1}))$$

Exercice 11 Mines-Ponts MP [02766] [correction]

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).

a) Montrer que pour tous $x, y \in E$

$$\|x\| + \|y\| \leq 2 \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$$

b) Montrer que l'on peut avoir l'égalité avec $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

Désormais la norme est euclidienne.

c) Montrer que pour tous $x, y \in E$

$$\|x\| + \|y\| \leq \sqrt{2} \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$$

d) Peut-on améliorer la constante $\sqrt{2}$?

Exercice 12 X MP [00795] [correction]

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Existe-t-il une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ invariante par conjugaison, c'est-à-dire telle que :

$$\forall (A, P) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \text{GL}_n(\mathbb{C}), \|A\| = \|P^{-1}AP\|$$

Distance d'un vecteur à une partie

Exercice 13 [03272] [correction]

On norme l'espace $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ des suites bornées par la norme infini notée $\|\cdot\|_\infty$.

Déterminer la distance de la suite e constante égale à 1 au sous-espace vectoriel \mathcal{C}_0 des suites réelles convergent vers 0.

Exercice 14 [03273] [correction]

On norme l'espace $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ des suites bornées par la norme infini notée $\|\cdot\|_\infty$.

Déterminer la distance de la suite $u = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ au sous-espace vectoriel \mathcal{C} des suites réelles convergentes.

Exercice 15 [00470] [correction]

On norme l'espace $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ des suites bornées par la norme infini notée $\|\cdot\|_\infty$.

Pour $x \in \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, on note Δx la suite de terme général

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$$

puis on forme $F = \{\Delta x/x \in \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})\}$.

Déterminer la distance de la suite e constante égale à 1 au sous-espace vectoriel F .

Comparaison de normes

Exercice 16 [00466] [correction]

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. On définit les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ par :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt, \|f\|_2 = \left(\int_0^1 f(t)^2 dt \right)^{1/2} \text{ et } \|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f|$$

- Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est plus fine que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ mais qu'elle n'équivaut ni à l'une, ni à l'autre.
- Comparer $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$.

Exercice 17 [00469] [correction]

- Etablir $\ell^1(\mathbb{R}) \subset \ell^2(\mathbb{R}) \subset \ell^\infty(\mathbb{R})$.
- Comparer $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\ell^1(\mathbb{R})$
- Comparer $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur $\ell^1(\mathbb{R})$

Exercice 18 [00468] [correction]

On note $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang. $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ étant un sous-espace vectoriel de $\ell^1(\mathbb{R})$, de $\ell^2(\mathbb{R})$ et de $\ell^\infty(\mathbb{R})$, on peut y définir $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

- Comparer $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$.
- Comparer $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$.

Exercice 19 [00467] [correction]

Soit $E = \mathcal{C}^1([-1, 1], \mathbb{R})$. On définit N_1, N_2 et N_3 par

$$N_1(f) = \sup_{[-1,1]} |f|, N_2(f) = |f(0)| + \sup_{[-1,1]} |f'| \text{ et } N_3(f) = \int_{-1}^1 |f|.$$

- Montrer que N_1, N_2 et N_3 sont des normes sur E .
- Comparer N_1 et N_2 d'une part, N_1 et N_3 d'autre part.

Exercice 20 [00473] [correction]

Sur $\mathbb{R}[X]$ on définit N_1 et N_2 par :

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| \text{ et } N_2(P) = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)|$$

- Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur $\mathbb{R}[X]$.
- Etudier la convergence de la suite de terme général

$$P_n = \frac{1}{n} X^n$$

pour l'une et l'autre norme.

- Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

Exercice 21 Centrale MP [02412] [correction]

Soient l'espace $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) / f(0) = 0\}$ et N l'application définie sur E par

$$N(f) = N_\infty(3f + f')$$

- Montrer que (E, N) est un espace vectoriel normé puis qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $N_\infty(f) \leq \alpha N(f)$.
- Les normes N_∞ et N sont-elles équivalentes ?

Exercice 22 Centrale MP [00465] [correction]

Soient $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ et $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$N(f) = \sqrt{f^2(0) + \int_0^1 f'^2(t) dt}$$

- Montrer que N définit une norme sur E .
- Comparer N et $\|\cdot\|_\infty$.

Equivalence de normes

Exercice 23 [00458] [correction]

Soit N une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $N(AB) \leq cN(A)N(B)$.

Exercice 24 [03146] [correction]

Soient $n \in \mathbb{N}$ et E l'espace des polynômes réels de degrés inférieurs à n . Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ vérifiant

$$\forall P \in E, \int_0^1 |P(t)| dt \geq \lambda \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|$$

Exercice 25 [00474] [correction]

Pour $d \in \mathbb{N}$, on pose $E = \mathbb{R}_d[X]$ l'espace des polynômes réels en l'indéterminée X de degrés inférieurs ou égaux à d .

a) Pour $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_d)$ famille de $d + 1$ nombres réels distincts et $P \in E$, on pose

$$N_\xi(P) = \sum_{k=0}^d |P(\xi_k)|$$

Montrer que N_ξ définit une norme sur E .

b) Soit (P_n) une suite de polynômes éléments de E . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on écrit

$$P_n = \sum_{k=0}^d a_{k,n} X^k$$

Etablir que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) la suite de fonctions (P_n) converge simplement sur \mathbb{R} ;
- (ii) la suite de fonctions (P_n) converge uniformément sur tout segment de \mathbb{R} ;
- (iii) pour tout $k \in \{0, \dots, d\}$, la suite $(a_{k,n})$ converge.

Exercice 26 Mines-Ponts MP [02768] [correction]

Soit E un sous-espace vectoriel de dimension $d \geq 1$ de $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$.

a) Etablir l'existence de $(a_1, \dots, a_d) \in [0, 1]^d$ tel que l'application

$$N : f \in E \mapsto \sum_{i=1}^d |f(a_i)|$$
 soit une norme.

b) Soit (f_n) une suite de fonctions de E qui converge simplement vers une fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que $f \in E$ et que la convergence est uniforme.

Exercice 27 Centrale MP [02411] [correction]

Soit

$$E = \{f \in \mathcal{C}^2([0, \pi], \mathbb{R}) / f(0) = f'(\pi) = 0\}$$

a) Montrer que

$$N : f \mapsto \|f + f''\|_\infty$$

est une norme sur E .

b) Montrer que N est équivalente à

$$\nu : f \mapsto \|f\|_\infty + \|f''\|_\infty$$

Exercice 28 [00463] [correction]

On note $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$.

a) Pour $f \in E$, on pose $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

Montrer que N est une norme sur E . Est-elle équivalente à $\|\cdot\|_\infty$?

b) Pour $f \in E$, on pose $N'(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$.

Montrer que N' est une norme sur E . Montrer qu'elle est équivalente à N .

Exercice 29 [00464] [correction]

On note E le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 vérifiant $f(0) = 0$. Pour $f \in E$, on pose

$$N_1(f) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| + \sup_{x \in [0, 1]} |f'(x)| \text{ et } N_2(f) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) + f'(x)|$$

Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur E et qu'elles sont équivalentes.

Exercice 30 [03262] [correction]

Soient $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et E^+ l'ensemble des fonctions de E qui sont positives et ne s'annulent qu'un nombre fini de fois. Pour toute fonction $\varphi \in E^+$ et pour toute fonction $f \in E$ on pose

$$\|f\|_\varphi = \sup_{t \in [0, 1]} \{|f(t)| \varphi(t)\}$$

a) Montrer que $\|\cdot\|_\varphi$ est une norme sur E

b) Montrer que si φ_1 et φ_2 sont deux applications strictement positives de E^+ alors les normes associées sont équivalentes.

c) Les normes $\|\cdot\|_x$ et $\|\cdot\|_{x^2}$ sont elles équivalentes ?

Exercice 31 Mines-Ponts MP [02767] [correction]

Soient $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et E^+ l'ensemble des fonctions de E qui sont positives et ne s'annulent qu'un nombre fini de fois. Pour toute fonction $\varphi \in E^+$ et pour toute fonction $f \in E$ on pose

$$\|f\|_\varphi = \int_0^1 |f(t)| \varphi(t) dt$$

a) Montrer que $\|\cdot\|_\varphi$ est une norme sur E

b) Montrer que si φ_1 et φ_2 sont deux applications strictement positives de E^+ alors les normes associées sont équivalentes.

c) Les normes $\|\cdot\|_x$ et $\|\cdot\|_{x^2}$ sont elles équivalentes ?

Exercice 32 Centrale MP [02409] [correction]

- a) Quelles sont les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles l'application $(x, y) \mapsto N_a(x, y) = \sqrt{x^2 + 2axy + y^2}$ définit une norme sur \mathbb{R}^2 .
 b) Si N_a et N_b sont des normes, calculer

$$\inf_{(x,y) \neq 0} \frac{N_a(x, y)}{N_b(x, y)} \text{ et } \sup_{(x,y) \neq 0} \frac{N_a(x, y)}{N_b(x, y)}$$

Exercice 33 [03265] [correction]

On note $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'espace des suites réelles bornées normé par $\|\cdot\|_\infty$.

- a) Soit $a = (a_n)$ une suite réelle. Former une condition nécessaire et suffisante sur la suite a pour que l'application

$$N_a : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n |x_n|$$

définit une norme sur $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

- b) Comparer N_a et $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 34 [03267] [correction]

Soient l'espace $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) / f(0) = 0\}$ et N_1, N_2 les applications définies sur E par

$$N_1(f) = \|f'\|_\infty \text{ et } N_2(f) = \|f + f'\|_\infty$$

- a) Montrer que N_1 et N_2 définissent des normes sur E .
 b) Montrer que N_2 est dominée par N_1 .
 c) En exploitant l'identité

$$f(x) = e^{-x} \int_0^x (f(t) + f'(t)) e^t dt$$

montrer que N_1 est dominée par N_2 .

Suites de matrices

Exercice 35 [03143] [correction]

Soient $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On suppose

$$(AB)^n \rightarrow O_p$$

Montrer que

$$(BA)^n \rightarrow O_p$$

Exercice 36 [01670] [correction]

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} P \text{ et } B^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} Q$$

On suppose que les matrices A et B commutent. Montrer que les matrices P et Q commutent.

Exercice 37 [00471] [correction]

Soit (A_n) une suite de matrices inversibles de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

On suppose

$$A_n \rightarrow A \text{ et } A_n^{-1} \rightarrow B$$

Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 38 [00472] [correction]

A quelle condition sur $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ existe-t-il une matrice $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que

$$M^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} A?$$

Exercice 39 [03010] [correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. On suppose que la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers B .

Montrer que B est semblable à une matrice diagonale n'ayant que des 0 et des 1.

Exercice 40 [03022] [correction]

a) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ diagonalisable vérifiant $\text{Sp}(A) \subset]-1, 1[$. Montrer $A^n \rightarrow O_p$.

b) Même question avec trigonalisable au lieu de diagonalisable.

Exercice 41 [03036] [correction]

Soit (A_n) une suite convergente d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et de limite A_∞ .

Montrer que pour n assez grand

$$\text{rg}(A_n) \geq \text{rg}(A_\infty)$$

Fonctions lipschitziennes

Exercice 42 [00475] [correction]

Soit E l'espace formé des fonctions réelles définies sur $[a, b]$, lipschitziennes et s'annulant en a .

Montrer que l'application $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ qui à $f \in E$ associe le réel

$$N(f) = \inf \{k \in \mathbb{R}^+ / \forall x, y \in [a, b], |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|\}$$

définit une norme sur E .

Exercice 43 [03052] [correction]

Soient A une partie bornée non vide d'un espace vectoriel normé (E, N) et \mathcal{L} le sous-espace vectoriel des applications lipschitziennes de A dans E .

a) Montrer que les éléments \mathcal{L} sont des fonctions bornées.

b) Pour $f \in \mathcal{L}$, soit

$$K_f = \{k \in \mathbb{R}^+ / \forall (x, y) \in A^2, N(f(x) - f(y)) \leq kN(x - y)\}$$

Justifier l'existence de $c(f) = \inf K_f$ puis montrer $c(f) \in K_f$.

c) Soient $a \in A$ et $N_a : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$N_a(f) = c(f) + N(f(a))$$

Montrer que N_a est une norme sur \mathcal{L} .

d) Soient $a, b \in A$. Montrer que les normes N_a et N_b sont équivalentes.

Exercice 44 [00476] [correction]

Soient E un espace vectoriel normé et $T : E \rightarrow E$ définie par

$$T(u) = \begin{cases} u & \text{si } \|u\| \leq 1 \\ \frac{u}{\|u\|} & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que T est au moins 2-lipschitzienne.

Exercice 45 Centrale MP [00477] [correction]

Soit E un espace vectoriel réel normé. On pose $f(x) = \frac{1}{\max(1, \|x\|)}x$.

Montrer que f est 2-lipschitzienne.

Montrer que si la norme sur E est hilbertienne alors f est 1-lipschitzienne.

Limite et continuité

Exercice 46 [00478] [correction]

Etudier les limites en $(0, 0)$ des fonctions suivantes

$$\text{a) } f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$$

$$\text{b) } f(x, y) = \frac{xy}{x^4 + y^4}$$

$$\text{c) } f(x, y) = \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$$

$$\text{d) } f(x, y) = \frac{xy}{x - y}$$

Exercice 47 [00480] [correction]

Soit $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^y$ pour $x > 0$ et $f(0, y) = 0$.

a) Montrer que f est une fonction continue.

b) Est-il possible de la prolonger en une fonction continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$?

Exercice 48 [00481] [correction]

Soient E un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E .

Pour $x \in E$, on pose

$$d(x, A) = \inf \{\|x - a\| / a \in A\}$$

Montrer que l'application $x \mapsto d(x, A)$ est définie et continue sur E .

Exercice 49 [00482] [correction]

Soient $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continue et \mathcal{C} un cercle de centre O et de rayon $R > 0$.

a) Montrer qu'il existe deux points A et B de \mathcal{C} diamétralement opposés tels que $g(A) = g(B)$.

b) Montrer qu'il existe deux points C et D de \mathcal{C} , se déduisant l'un de l'autre par un quart de tour tels que $g(C) = g(D)$.

Exercice 50 Mines-Ponts MP [02769] [correction]

Déterminer l'ensemble des morphismes continus de (U, \times) dans lui-même.

Continuité des applications linéaires

Exercice 51 [00483] [correction]

Soit u un endomorphisme continu d'un espace vectoriel normé E .

Montrer que

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(u), |\lambda| \leq \|u\|$$

Exercice 52 [00484] [correction]

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. On suppose qu'une suite (f_n) d'éléments de $\mathcal{LC}(E, F)$ converge vers $f \in \mathcal{LC}(E, F)$ (au sens de la norme subordonnée) et qu'une suite (x_n) d'éléments de E converge vers $x \in E$. Etablir que $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$.

Exercice 53 [00485] [correction]

Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On suppose que pour toute suite (u_n) tendant vers 0, $f(u_n)$ est bornée.

Montrer que f est continue.

Exercice 54 [00486] [correction]

Montrer que N_1 et N_2 normes sur E sont équivalentes si, et seulement si, Id_E est bicontinue de (E, N_1) vers (E, N_2) .

Exercice 55 [00487] [correction]

Soit $u \in \mathcal{LC}(E, F)$. Montrer que $\|u\| = \sup_{\|x\|_E < 1} \|u(x)\|_F$.

Exercice 56 [00488] [correction]

Soient E un espace vectoriel normé non réduit à $\{0\}$ et $u, v \in \mathcal{LC}(E)$ tels que

$$u \circ v - v \circ u = \alpha \text{Id}_E$$

pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u \circ v^{n+1} - v^{n+1} \circ u = (n+1)\alpha v^n$$

b) En déduire que $\alpha = 0$.

Exercice 57 [00489] [correction]

Soit E une algèbre de dimension finie non nulle. On désire établir que E peut être muni d'une norme d'algèbre. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E . Pour tout $x \in E$, on pose

$$N(x) = \sup_{a \in E, \|a\|=1} \|ax\|.$$

a) Justifier que $N(x)$ existe dans \mathbb{R} .

b) Etablir que N est une norme d'algèbre sur E .

Exercice 58 X MP [00490] [correction]

Soit f une forme linéaire non nulle et continue sur un espace vectoriel normé E .

Montrer que si $x \notin \ker f$ alors

$$d(x, \ker f) = \frac{|f(x)|}{\|f\|}$$

Exercice 59 Mines-Ponts MP [02832] [correction]

Soient d un entier naturel, (f_n) une suite de fonctions polynomiales de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de degré au plus d . On suppose que cette suite converge simplement. Montrer que la limite est polynomiale de degré au plus d , la convergence étant uniforme sur tout compact.

Exercice 60 Mines-Ponts MP [02888] [correction]

Soit E l'espace des $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 2π -périodiques. On norme E en posant, si $f \in E$: $\|f\| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|$. Si $f \in E$, soit $G(f) : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} f(x+t) dt \in \mathbb{C}$.

a) Montrer que G est un endomorphisme continu de E .

b) L'endomorphisme G est-il inversible ?

c) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de G .

Exercice 61 [03282] [correction]

Soit E un espace normé de dimension finie et u un endomorphisme de E vérifiant

$$\forall x \in E, \|u(x)\| \leq \|x\|$$

Montrer que les espaces $\ker(u - \text{Id})$ et $\text{Im}(u - \text{Id})$ sont supplémentaires.

Calcul de norme d'application linéaire

Exercice 62 [00491] [correction]

On note $\ell^\infty(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel normé des suites réelles bornées muni de la norme N_∞ . Pour $u = (u_n) \in \ell^\infty(\mathbb{R})$ on pose $T(u)$ et $\Delta(u)$ les suites définies par

$$T(u)_n = u_{n+1} \text{ et } \Delta(u)_n = u_{n+1} - u_n$$

- Montrer que les applications T et Δ sont des endomorphismes continus de ℓ^∞ .
- Calculer leur norme.

Exercice 63 [00492] [correction]

Soient $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et $F = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. On définit N_1 et N_2 par

$$N_1(f) = \|f\|_\infty \text{ et } N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

- On définit $T : E \rightarrow F$ par : pour tout $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $T(f) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$T(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$$

Montrer que T est une application linéaire continue.

- Calculer la norme de T .

Exercice 64 [00493] [correction]

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ définie par

$$\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f|$$

Etudier la continuité de la forme linéaire $\varphi : f \mapsto f(1) - f(0)$ et calculer sa norme.

Exercice 65 [00494] [correction]

On munit l'espace $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_2$. Pour f et φ éléments de E on pose $T_\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\varphi(t) dt$. Montrer que T_φ est une forme linéaire continue et calculer sa norme.

Exercice 66 [00495] [correction]

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_1$ définie par

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$$

Etudier la continuité de la forme linéaire

$$\varphi : f \mapsto \int_0^1 tf(t) dt$$

et calculer sa norme.

Exercice 67 [00496] [correction]

Soient $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et u l'endomorphisme de E qui envoie $f \in E$ sur $x \mapsto f(x) - f(0)$.

- Montrer que pour E muni de $\|\cdot\|_\infty$ l'endomorphisme u est continu et calculer $\|u\|$.
- Montrer que pour E muni de $\|\cdot\|_1$ l'endomorphisme u n'est pas continu.

Exercice 68 [00497] [correction]

Sur $\mathbb{R}[X]$ on définit N_1 et N_2 par :

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| \text{ et } N_2(P) = \sup_{t \in [-1, 1]} |P(t)|.$$

- Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur $\mathbb{R}[X]$.
- Montrer que la dérivation est continue pour N_1 et calculer sa norme.
- Montrer que la dérivation n'est pas continue pour N_2 .
- N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

Exercice 69 [00498] [correction]

On munit l'espace $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour f et φ éléments de E on pose $T_\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\varphi(t) dt$. Montrer que T_φ est une forme linéaire continue et calculer sa norme. On pourra pour cela introduire les fonctions $f_\varepsilon : t \mapsto \frac{\varphi(t)}{|\varphi(t)| + \varepsilon}$.

Exercice 70 [00499] [correction]

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$.

Montrons que l'application $u : f \mapsto u(f)$ où $u(f)(x) = f(0) + x(f(1) - f(0))$ est un endomorphisme continu de E et calculer sa norme.

Exercice 71 [00500] [correction]

Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$.

a) Montrer que pour toute fonction $f \in E$, il existe une unique primitive F de f vérifiant

$$\int_0^1 F(t) dt = 0$$

b) Etablir que l'application $u : f \mapsto F$ est un endomorphisme continu.

c) Justifier

$$F(x) = \int_0^1 \left(\int_t^x f(u) du \right) dt$$

d) Calculer $\|u\|$.

Exercice 72 [01012] [correction]

Pour $a = (a_n) \in \ell^\infty(\mathbb{R})$ et $u = (u_n) \in \ell^1(\mathbb{R})$, on pose $\langle a, u \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n$.

a) Justifier l'existence de $\langle a, u \rangle$.

b) Montrer que l'application linéaire $\varphi_u : a \mapsto \langle a, u \rangle$ est continue et calculer sa norme.

c) Même question avec $\psi_a : u \mapsto \langle a, u \rangle$.

Exercice 73 [03266] [correction]

Soit E l'espace des fonctions continues de carré intégrable sur \mathbb{R} normé par

$$N_2(f) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^2 \right)^{1/2}$$

a) Soit ϕ une fonction continue bornée. Montrer que l'application

$$u : f \mapsto \phi f$$

définit un endomorphisme continu de E .

b) Soient x_0 fixé dans \mathbb{R} et f_n la fonction continue valant 1 en x_0 , affine sur $[x_0 - 1/n, x_0]$ et $[x_0, x_0 + 1/n]$ et nulle ailleurs.

Montrer que pour g fonction continue sur \mathbb{R} ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_{\mathbb{R}} f_n^2 g}{\int_{\mathbb{R}} f_n^2} = g(x_0)$$

c) Calculer la norme subordonnée de l'endomorphisme u défini à la première question.

Exercice 74 CCP MP [03300] [correction]

On note E l'espace des fonctions réelles définies et continues sur $[0, 1]$.

On note E_∞ cet espace muni de la norme

$$\|\cdot\|_\infty : f \mapsto \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$$

et E_1 cet espace muni de la norme

$$\|\cdot\|_1 : f \mapsto \int_0^1 |f(t)| dt$$

Soit u l'endomorphisme de E défini par

$$u(f)(x) = \int_0^x t f(t) dt$$

a) Montrer que l'application v de E_∞ vers E_1 qui à f associe $u(f)$ est continue et déterminer sa norme.

b) Montrer que l'application w de E_1 vers E_∞ qui à f associe $u(f)$ est continue et déterminer sa norme.

Dérivation d'une fonction vectorielle

Exercice 75 [00564] [correction]

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ dérivable en 0. On suppose

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = 2f(x)$$

Montrer que f est linéaire

Exercice 76 [00565] [correction]

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $f : \mathcal{C}^1([a, b[, E)$.

Montrer que f admet un prolongement de classe \mathcal{C}^1 à $[a, b]$ si, et seulement si, f' admet une limite en b .

Exercice 77 [00566] [correction]

Pour tout réel x , on pose :

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & & & 0 \\ x^2/2! & x & 1 & & \\ x^3/3! & x^2/2! & x & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ x^n/n! & \dots & \dots & x^2/2! & x \end{vmatrix}$$

Montrer que D_n est une fonction dérivable et calculer $D'_n(x)$.
En déduire l'expression de $D_n(x)$.

Exercice 78 [00567] [\[correction\]](#)

a) Montrer que pour tout $0 \leq p < n$ on a

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k^p = 0 \text{ et } \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k^n = (-1)^n n!$$

b) En déduire, pour $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ de classe \mathcal{C}^n , la limite quand $h \rightarrow 0$ de

$$\frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(kh)$$

Exercice 79 [00568] [\[correction\]](#)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ de classe \mathcal{C}^∞ . Etablir que pour tout $t \neq 0$,
 $(t^{n-1} f(1/t))^{(n)} = \frac{(-1)^n}{t^{n+1}} f^{(n)}(1/t)$.

Exercice 80 [00569] [\[correction\]](#)

Soit $f : [0, 1] \rightarrow E$ dérivable à droite en 0 et vérifiant $f(0) = 0$.
Déterminer la limite quand $n \rightarrow +\infty$ de

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(k/n^2)$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

a) Soit $x \in E$. Si $x = 0$ alors $N_1(x) = N_2(x) = 0$. Sinon :
 Posons $y = \frac{x}{N_1(x)}$. On a $y \in B_1 \subset B_2$ donc $N_2(y) \leq 1$ d'où $N_2(x) \leq N_1(x)$.
 De manière symétrique $N_1(x) \leq N_2(x)$ puis l'égalité.
 b) On reprend la démarche ci-dessus à partir de $y = \frac{x}{N_1(x) + \varepsilon}$ avec $\varepsilon > 0$ pour obtenir $N_2(x) < N_1(x) + \varepsilon$ avant de faire tendre ε vers 0.

Exercice 2 : [énoncé]

Notons (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{K}^n .
 Si N est une norme alors

$$N(e_i) = a_i > 0$$

Il est donc nécessaire que les a_1, \dots, a_n soient tous strictement positifs pour que N soit une norme.

Inversement, supposons que les a_1, \dots, a_n sont tous strictement positifs.

L'application N est alors à valeurs dans \mathbb{R}^+ .

La relation $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ est immédiate.

Puisque les a_i sont positifs, on a $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ car

$$a_i |x_i + y_i| \leq a_i |x_i| + a_i |y_i|.$$

Enfin, si $N(x) = 0$ alors par nullité d'une somme de quantités positives

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, a_i |x_i| = 0$$

donc

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i = 0$$

i.e. $x = 0$

Exercice 3 : [énoncé]

Quand t varie de 0 à 1, l'expression $|x_1 + tx_2|$ varie de $|x_1|$ à $|x_1 + x_2|$

Par suite, on peut exprimer plus simplement l'action de N :

$$N(x_1, x_2) = \max \{|x_1|, |x_1 + x_2|\}$$

Soient $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ deux vecteurs de \mathbb{R}^2 .

$$N(x+y) = \max \{|x_1 + y_1|, |x_1 + y_1 + x_2 + y_2|\} \leq \max \{|x_1| + |y_1|, |x_1 + x_2| + |y_1 + y_2|\} \leq N(x) + N(y)$$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$N(\lambda.x) = \max \{|\lambda| |x_1|, |\lambda| |x_1 + x_2|\} = |\lambda| N(x)$$

Enfin si $N(x) = 0$ alors $|x_1| = |x_1 + x_2| = 0$ et donc $x_1 = x_1 + x_2 = 0$ puis $x = 0$.
 Ainsi N définie bien une norme sur \mathbb{R}^2 .

Si $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ alors $N(x) = x_1 + x_2$.

Si $x_1 \leq 0, x_2 \geq 0$ alors $N(x) = \max(-x_1, |x_1 + x_2|)$.

Si $x_1 \geq 0, x_2 \leq 0$ alors $N(x) = \max(x_1, |x_1 + x_2|)$.

Si $x_1 \leq 0, x_2 \leq 0$ alors $N(x) = -(x_1 + x_2)$.

Ces considérations permettent de représenter la boule unité fermée.

De manière immédiate : $N(x) \leq 2 \|x\|_\infty$.

Aussi $|x_1| \leq 2N(x)$ et puisque $|x_2| \leq |x_1 + x_2| + |x_1|$ on a aussi $|x_2| \leq 2N(x)$.

On en déduit $\|x\|_\infty \leq 2N(x)$.

Exercice 4 : [énoncé]

L'application $N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ est bien définie car toute fonction continue sur le segment $[0, 1]$ y est bornée

La liberté de la famille (f_1, \dots, f_n) est une condition nécessaire car, sinon, une relation linéaire sur la famille (f_1, \dots, f_n) détermine un n -uplet (x_1, \dots, x_n) non nul tel que $N(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Inversement, supposons la famille (f_1, \dots, f_n) libre.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Si $N(x) = 0$ alors $x_1 f_1 + \dots + x_n f_n = 0$ et donc $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$ car (f_1, \dots, f_n) libre.

$$N(\lambda x) = \|\lambda x_1 f_1 + \dots + \lambda x_n f_n\|_\infty = \|\lambda (x_1 f_1 + \dots + x_n f_n)\|_\infty = |\lambda| N(x).$$

$$N(x + y) = \|(x_1 + y_1) f_1 + \dots + (x_n + y_n) f_n\|_\infty =$$

$$\|(x_1 f_1 + \dots + x_n f_n) + (y_1 f_1 + \dots + y_n f_n)\|_\infty \leq N(x) + N(y).$$

Finalement N est une norme sur \mathbb{R}^n

Exercice 5 : [énoncé]

Ce sont les normes usuelles associées à la base canonique sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exercice 6 : [énoncé]

$\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car c'est la norme 2 associée à la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On a

$$\|AB\|^2 = \sum_{i,j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right)^2$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \sum_{\ell=1}^n b_{\ell,j}^2$$

donc

$$\|AB\|^2 \leq \sum_{i,k=1}^n a_{i,k}^2 \sum_{j,\ell=1}^n b_{\ell,j}^2 = \|A\|^2 \|B\|^2$$

puis

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

Exercice 7 : [énoncé]

a) $\|A\| = 0 \Rightarrow \forall i \leq i \leq n, \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = 0 \Rightarrow \forall i \leq i, j \leq n, a_{i,j} = 0 \Rightarrow A = 0$.

$$\|\lambda A\| = \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |\lambda a_{i,j}| = \sup_{1 \leq i \leq n} |\lambda| \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = |\lambda| \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = |\lambda| \|A\|.$$

$$\|A + B\| = \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j} + b_{i,j}| \leq \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| + |b_{i,j}| \leq$$

$$\sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| + \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |b_{i,j}| = \|A\| + \|B\|.$$

$$\|AB\| = \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right| \leq \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{i,k} b_{k,j}|.$$

$$\text{Or } \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{i,k} b_{k,j}| \leq \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,k}| |b_{k,j}| = \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| \sum_{j=1}^n |b_{k,j}| \leq \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| \|B\| \leq$$

$$\|A\| \|B\| \text{ donc } \|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

On peut aussi remarquer que $\|I_n\| = 1$.

b) Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$, il existe $X \neq 0, AX = \lambda X$.

En notant x_1, \dots, x_n les éléments de la colonne X (non tous nuls) on a

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda x_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j.$$

Considérons $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $|x_i| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \neq 0$.

$$\text{La relation précédente donne : } |\lambda| |x_i| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |x_j| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |x_i| \text{ donc}$$

$$|\lambda| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \leq \|A\|.$$

Exercice 8 : [énoncé]

a) L'inégalité vaut pour $a = 0$ ou $b = 0$. Pour $a, b > 0$.

La fonction \ln est concave :

$$\forall \lambda \in [0, 1], \forall x, y > 0, \lambda \ln(x) + (1 - \lambda) \ln(y) \leq \ln(\lambda x + (1 - \lambda)y)$$

Appliquée à $x = a^p, y = b^q$ et $\lambda = 1/p$ cela donne :

$$\frac{1}{p} \ln(a^p) + \frac{1}{q} \ln(b^q) \leq \ln\left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q\right)$$

puis

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$$

b) On applique le résultat précédent à $a = \frac{|x_i|}{\|x\|_p}$ et $b = \frac{|y_i|}{\|y\|_q}$ pour obtenir

$$\frac{|x_i y_i|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q}$$

En sommant pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on obtient

$$\sum_{i=1}^n \frac{|x_i y_i|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

puis

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

c) Par l'inégalité triangulaire

$$\|x + y\|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p$$

Or par l'identité proposée

$$\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i| (|x_i| + |y_i|)^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| (|x_i| + |y_i|)^{p-1}$$

Par l'inégalité du b)

$$\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p \leq \|x\|_p \left(\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^{(p-1)q} \right)^{1/q} + \|y\|_p \left(\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^{(p-1)q} \right)^{1/q}$$

donc

$$\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \left(\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p \right)^{1/q}$$

car $(p - 1)q = pq - q = p$

puis

$$\left(\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p \right)^{1/p} \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

car $1 - 1/q = 1/p$ (et l'inégalité vaut que $\sum_{i=1}^n (|x_i|^p + |y_i|^p) \neq 0$ ou non)

Finalement

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

d) Les propriétés $\|x\|_p = 0 \Rightarrow x = 0$ et $\|\lambda x\|_p = |\lambda| \|x\|_p$ sont immédiates.

Exercice 9 : [énoncé]

Si $\|x\|_\infty = 0$ alors $x = 0$ et $\|x\|_p = 0$ donc

$$\|x\|_\infty = \lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p$$

Si $\|x\|_\infty \neq 0$. Pour tout $p \geq 1$,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq \left(n \|x\|_p^p \right)^{1/p} = n^{1/p} \|x\|_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \|x\|_\infty$$

donc

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$$

Exercice 10 : [énoncé]

a) Par réduction au même dénominateur

$$\frac{a}{u} + \frac{b}{v} - \frac{1}{u+v} = \frac{av(u+v) + bu(u+v) - uv}{uv(u+v)}$$

qu'on peut réécrire

$$\frac{a}{u} + \frac{b}{v} - \frac{1}{u+v} = \frac{(\sqrt{av} - \sqrt{bu})^2 + (a+b+2\sqrt{ab}-1)uv}{uv(u+v)}$$

et si $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$ alors

$$\frac{a}{u} + \frac{b}{v} - \frac{1}{u+v} = \frac{(\sqrt{av} - \sqrt{bu})^2}{uv(u+v)} \geq 0$$

b)

$$N((f+g)^{-1}) = \int_0^1 \frac{dt}{f(t)+g(t)} \leq a \int_0^1 \frac{dt}{f(t)} + b \int_0^1 \frac{dt}{g(t)} = aN(f^{-1}) + bN(g^{-1})$$

qui donne l'inégalité voulue avec

$$a = \frac{N(f)^2}{(N(f)+N(g))^2} \text{ et } b = \frac{N(g)^2}{(N(f)+N(g))^2}$$

qui sont tels que $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$.

c) Par l'inégalité triangulaire

$$N(f+g)N((f+g)^{-1}) \leq (N(f)+N(g))N((f+g)^{-1})$$

et en vertu de ce qui précède

$$N(f+g)N((f+g)^{-1}) \leq \frac{N(f)^2 N(f^{-1})}{N(f)+N(g)} + \frac{N(g)^2 N(g^{-1})}{N(f)+N(g)}$$

qui donne

$$N(f+g)N((f+g)^{-1}) \leq \frac{N(f)}{N(f)+N(g)} M + \frac{N(g)}{N(f)+N(g)} M = M$$

avec

$$M = \max(N(f)N(f^{-1}), N(g)N(g^{-1}))$$

Document3

Exercice 11 : [énoncé]

a) $x = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y)$ donc

$$\|x\| \leq \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$$

Aussi $\|y\| \leq \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$ donc

$$\|x\| + \|y\| \leq 2 \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$$

b) Sur \mathbb{R}^2 avec $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$, il y a égalité pour $x = (1, 0)$ et $y = (0, 1)$.

c)

$$(\|x\| + \|y\|)^2 \leq 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Or $x = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y)$ donne

$$\|x\|^2 = \frac{1}{4} (\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 + 2\|x\|^2 - 2\|y\|^2)$$

aussi

$$\|y\|^2 = \frac{1}{4} (\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 - 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2)$$

donc

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 \leq \frac{1}{2} (\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2)$$

puis

$$(\|x\| + \|y\|)^2 \leq 2 \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}^2$$

qui permet de conclure.

d) Non, sur \mathbb{R}^2 , il y a égalité pour $x = (1, 0)$ et $y = (0, 1)$.

Exercice 12 : [énoncé]

Cas $n = 2$

Par l'absurde supposons qu'une telle norme existe.

Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Les matrices A et B sont semblables (via $P = \text{diag}(1/2, 1)$) donc $\|A\| = \|B\|$. Or $B = 2A$ donc $\|B\| = 2\|A\|$ puis $\|A\| = 0$.

C'est absurde car $A \neq O_2$.

Cas général : semblable.

Exercice 13 : [énoncé]

Puisque $0 \in \mathcal{C}_0$, on a déjà

$$d(e, \mathcal{C}_0) \leq d(e, 0) = \|e\|_\infty = 1$$

Soit $x \in \mathcal{C}_0$. On a

$$|x_n - 1| \leq \|x - e\|_\infty$$

et donc quand $n \rightarrow +\infty$

$$1 \leq \|x - e\|_\infty$$

On en déduit

$$d(e, \mathcal{C}_0) \geq 1$$

et donc $d(e, \mathcal{C}_0) = 1$.

Exercice 14 : [énoncé]

Puisque $0 \in \mathcal{C}_0$, on a déjà

$$d(u, \mathcal{C}) \leq d(u, 0) = \|u\|_\infty = 1$$

Soit $x \in \mathcal{C}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite. Pour $n = 2p$ pair

$$|x_{2p} - u_{2p}| \leq \|x - u\|_\infty$$

donne $|x_{2p} - 1| \leq \|x - u\|_\infty$ puis à la limite

$$|\ell - 1| \leq \|x - u\|_\infty$$

De même avec $n = 2p + 1$ impair on obtient

$$|\ell + 1| \leq \|x - u\|_\infty$$

On en déduit

$$|1| = \left| \frac{1+\ell}{2} + \frac{1-\ell}{2} \right| \leq \frac{1}{2} (|1+\ell| + |1-\ell|) \leq \|x - u\|_\infty$$

On en déduit

$$d(u, \mathcal{C}) \geq 1$$

et donc $d(u, \mathcal{C}) = 1$.

Exercice 15 : [énoncé]

Puisque $0 \in F$, $d(e, F) \leq d(e, 0) = 1$.

En raisonnant par l'absurde montrons $d(e, F) = 1$ en supposant $d(e, F) < 1$.

Il existe alors une suite $x \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $\|\Delta x - e\|_\infty = \rho$ avec $\rho < 1$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|\Delta x(k) - 1| \leq \rho$ donc $\Delta x(k) \geq 1 - \rho$.

En sommant ces inégalités pour k allant de 0 à $n-1$, on obtient

$x(n) - x(0) \geq n(1 - \rho)$ et donc $x \rightarrow +\infty$.

Ceci contredit $x \in \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et permet de conclure.

Exercice 16 : [énoncé]

a)

$$\|f\|_1 \leq \int_0^1 \|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$$

et

$$\|f\|_2 \leq \left(\int_0^1 \|f\|_\infty^2 \right)^{1/2} \leq \|f\|_\infty$$

Posons $f_n(x) = x^n$, $\|f_n\|_\infty = 1$ alors que $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$ et $\|f_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \rightarrow 0$. Les normes ne sont donc pas équivalentes.

b) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_0^1 1 \times |f(t)| dt \leq \left(\int_0^1 1 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^1 f(t)^2 dt \right)^{1/2}$$

donc

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_2$$

Pour $f_n(x) = \sqrt{2n+1}x^n$, $\|f_n\|_2 = 1$ et $\|f_n\|_1 = \frac{\sqrt{2n+1}}{n+1} \rightarrow 0$, les normes ne sont donc pas équivalentes.

Exercice 17 : [énoncé]

a) Aisément $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_1$

Soit u^N définie par $u_n^N = 1$ si $n < N$ et $u_n^N = 0$ sinon. $u^N \in \ell^1(\mathbb{R})$.

On a $\|u^N\|_1 = N$ et $\|u^N\|_\infty = 1$ donc il n'existe pas de $\alpha > 0$ tel que

$$\|\cdot\|_1 \leq \alpha \|\cdot\|_\infty.$$

$\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

b) On a $\sum_{n=0}^N |u_n|^2 \leq \left(\sum_{n=0}^N |u_n| \right)^2$ donc quand $N \rightarrow +\infty$:

$$\|u\|_2^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 \leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \right)^2 = \|u\|_1^2. \text{ Ainsi } \|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1.$$

Soit u^N définie par $u_n^N = 1$ si $n < N$ et $u_n^N = 0$ sinon. $u^N \in \ell^1(\mathbb{R})$.

On a $\|u^N\|_1 = N$ et $\|u^N\|_2 = \sqrt{N}$ donc il n'existe pas de $\alpha > 0$ tel que

$$\|\cdot\|_1 \leq \alpha \|\cdot\|_2.$$

$\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 18 : [énoncé]

a) Aisément $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_1$

Soit u^N définie par $u_n^N = 1$ si $n < N$ et $u_n^N = 0$ sinon.

On a $\|u^N\|_1 = N$ et $\|u^N\|_\infty = 1$ donc il n'existe pas de $\alpha > 0$ tel que

$$\|\cdot\|_1 \leq \alpha \|\cdot\|_\infty.$$

$\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

b) En introduisant N tel que $n > N \Rightarrow u_n = 0$ on a :

$$\|u\|_2^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 = \sum_{n=0}^N |u_n|^2 \leq \left(\sum_{n=0}^N |u_n| \right)^2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \right)^2 = \|u\|_1^2$$

Ainsi $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1$.

Soit u^N définie par $u_n^N = 1$ si $n < N$ et $u_n^N = 0$ sinon.

On a $\|u^N\|_1 = N$ et $\|u^N\|_2 = \sqrt{N}$ donc il n'existe pas de $\alpha > 0$ tel que

$$\|\cdot\|_1 \leq \alpha \|\cdot\|_2.$$

$\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 19 : [énoncé]

a) Sans difficultés.

b) $N_1(f) \leq N_2(f)$ car $|f(x)| \leq |f(0)| + \left| \int_0^x f'(t) dt \right| \leq |f(0)| + |x| \sup_{[-1,1]} |f'|$.

Pour $f(x) = \sin nx$, $N_1(f) = 1$ alors que $N_2(f) = n$, les normes N_1 et N_2 ne sont donc pas équivalentes. On a aussi $N_3(f) \leq 2N_1(f)$ sans difficultés. Posons

$f(x) = n \cos(nx) \chi_{[-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}]}(x)$. La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 , $N_1(f) = 1$ et

$N_3(f) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t) dt = 2$ (pour $n \geq 2$). Les normes N_1 et N_3 ne sont donc pas équivalentes.

Exercice 20 : [énoncé]

a) $N_1, N_2 : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$.

$$N_1(P+Q) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0) + Q^{(k)}(0)| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| + |Q^{(k)}(0)| =$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| + \sum_{k=0}^{+\infty} |Q^{(k)}(0)| = N_1(P) + N_1(Q),$$

$$N_1(\lambda P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |\lambda P^{(k)}(0)| = |\lambda| \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| = |\lambda| N_1(P),$$

$$N_1(P) = 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, P^{(k)}(0) = 0 \text{ or } P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k \text{ donc } P = 0.$$

Finalement N_1 est une norme.

$$N_2(P+Q) = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t) + Q(t)| \leq \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)| + |Q(t)| \leq$$

$$\sup_{t \in [-1,1]} |P(t)| + \sup_{t \in [-1,1]} |Q(t)| = N_2(P) + N_2(Q),$$

$$N_2(\lambda P) = \sup_{t \in [-1,1]} |\lambda P(t)| = \sup_{t \in [-1,1]} |\lambda| |P(t)| = |\lambda| \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)| = |\lambda| N_2(P),$$

$N_2(P) = 0 \Rightarrow \forall t \in [-1,1], P(t) = 0$ et par infinité de racines $P = 0$.

b) La suite $\frac{1}{n} X^n$ converge vers 0 pour N_2 mais n'est pas bornée et donc diverge pour N_1 .

c) Les normes ne peuvent être équivalentes car sinon les suites convergent pour l'une des normes convergerait pour l'autre.

Exercice 21 : [énoncé]

a) Les propriétés $N(f+g) \leq N(f) + N(g)$ et $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$ sont faciles.

Si $N(f) = 0$ alors la résolution de l'équation différentielle $f' + 3f = 0$ avec la condition initiale $f(0) = 0$ donne $f = 0$. Ainsi l'application N est bien une norme sur E .

On remarque

$$f(x) = e^{-3x} \int_0^x (f(t)e^{3t})' dt = e^{-3x} \int_0^x (3f(t) + f'(t))e^{3t} dt$$

Par suite $|f(x)| \leq e^3 N(f)$ pour tout $x \in [0, 1]$ et donc $N_\infty(f) \leq \alpha N(f)$ avec $\alpha = e^3$.

b) Pour $f_n(x) = x^n$, $N_\infty(f) = 1$ et $N(f) = N_\infty(x \mapsto 3x^n + nx^{n-1}) = n + 3 \rightarrow +\infty$.
Les normes N_∞ et N ne sont pas équivalentes.

Exercice 22 : [énoncé]

a) Posons $\varphi(f, g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$. φ est une forme bilinéaire symétrique, $\varphi(f, f) \geq 0$ et si $\varphi(f, f) = 0$ alors $f(0) = 0$ et pour tout $t \in [0, 1]$, $f'(t) = 0$ donc $f = 0$. φ est donc un produit scalaire et N apparaît comme étant la norme associée.

b) Pour tout $x \in [0, 1]$, $|f(x)| \leq |f(0)| + \left| \int_0^x f'(t)dt \right| \leq \sqrt{2}N(f)$, donc $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}N(f)$. Pour $f(x) = \sin(nx\pi)$, $\|f\|_\infty = 1$ et $N(f) = n\pi/\sqrt{2} \rightarrow +\infty$. Les deux normes ne sont donc pas équivalentes.

Exercice 23 : [énoncé]

On a $N_\infty(AB) \leq nN_\infty(A)N_\infty(B)$ et $\alpha N \leq N_\infty \leq \beta N$ avec $\alpha, \beta > 0$ donc $N(AB) \leq \frac{1}{\alpha} N_\infty(AB) \leq \frac{n}{\alpha} N_\infty(A)N_\infty(B) \leq \frac{n\beta^2}{\alpha} N(A)N(B)$.

Exercice 24 : [énoncé]

Les applications

$$N_1 : P \mapsto \int_0^1 |P(t)| dt \text{ et } N_2 : P \mapsto \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|$$

définissent deux normes sur l'espace E . Puisque l'espace E est de dimension finie, ces deux normes sont équivalentes et en particulier N_2 est dominée par N_1

Exercice 25 : [énoncé]

a) facile.

b) (i) \Rightarrow (ii) Supposons que la suite (P_n) converge simplement sur \mathbb{R} vers une certaine fonction f . On ne sait pas a priori si cette fonction est, ou non, polynomiale.

Soit $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_d)$ une famille de $d + 1$ réels distincts et $P \in E$ déterminé par $P(\xi_k) = f(\xi_k)$. On peut affirmer que la (P_n) suite converge vers P pour la norme N_ξ . Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} avec $a < b$. $N = \|\cdot\|_{\infty, [a,b]}$ définit une norme sur E qui est équivalent à N_ξ car E est de dimension finie. Puisque (P_n) converge vers P pour la norme N_ξ , on peut affirmer que la convergence a aussi lieu pour la norme N et donc (P_n) converge uniformément vers P sur le segment $[a, b]$. Au passage, on en déduit que $f = P$.

(ii) \Rightarrow (iii) Si la suite (P_n) converge uniformément sur tout segment vers une fonction f , elle converge aussi simplement vers f et l'étude ci-dessus montre que f est un polynôme. En introduisant la norme infinie relative aux coefficients polynomiaux :

$$\|a_0 + \dots + a_d X^d\|_\infty = \max_{0 \leq k \leq d} |a_k|$$

l'équivalence de norme permet d'établir que les coefficients de P_n convergent vers les coefficients respectifs de f .

(iii) \Rightarrow (i) immédiat.

Exercice 26 : [énoncé]

a) L'application $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ proposée vérifie aisément $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$ et $N(f + g) \leq N(f) + N(g)$. Le problème est l'obtention de $N(f) = 0 \Rightarrow f = 0$. Par récurrence sur $d \in \mathbb{N}^*$.

Cas $d = 1$: $E = \text{Vect}(g)$ avec $g \neq \tilde{0}$. Un réel $a_1 \in [0, 1]$ tel que $g(a_1) \neq 0$ convient. Supposons la propriété au rang $d \geq 1$.

Soit E un sous-espace vectoriel de dimension $d + 1$ de $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Il existe une fonction g non nulle élément de E et il existe $a_{d+1} \in [0, 1]$ tel que $g(a_{d+1}) \neq 0$. Considérons alors $H = \{f \in E / f(a_{d+1}) = 0\}$. On vérifie aisément $E = H \oplus \text{Vect}g$.

Puisque H est alors de dimension d , on peut appliquer l'hypothèse de récurrence pour introduire $(a_1, \dots, a_d) \in [0, 1]^d$ tel que $h \mapsto \sum_{i=1}^d |h(a_i)|$ soit une norme sur H .

Considérons alors $N : f \in E \mapsto \sum_{i=1}^{d+1} |f(a_i)|$ et montrons $N(f) = 0 \Rightarrow f = 0$.

Supposons $N(f) = 0$ et donc $|f(a_1)| = \dots = |f(a_d)| = |f(a_{d+1})| = 0$. Puisque $E = H \oplus \text{Vect}g$, on peut écrire $f = h + \lambda g$ avec $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. La propriété $|f(a_{d+1})| = 0$ entraîne $\lambda = 0$ et la propriété $|f(a_1)| = \dots = |f(a_d)| = 0$ entraîne alors $h = 0$. On peut donc conclure $f = 0$.

Récurrence établie.

b) Introduisons $E' = E + \text{Vect}f$ de dimension d ou $d + 1$. Sur E' , on peut introduire une norme du type précédent et l'hypothèse de convergence simple donne alors que (f_n) tend vers f pour la norme considérée. Or sur E' de dimension finie toutes les normes sont équivalentes et donc (f_n) tend aussi vers f pour la norme $\| \cdot \|_\infty$ ce qui signifie que (f_n) converge uniformément vers f . Il reste à montrer que $f \in E$. Par l'absurde, supposons que $f \notin E$. On a alors $E' = E \oplus \text{Vect}f$. Considérons alors la projection p sur $\text{Vect}f$ parallèlement à E . C'est une application linéaire au départ d'un espace de dimension finie, elle est donc continue. Or $p(f_n) = 0 \rightarrow 0$ et $p(f) = f \neq 0$. C'est absurde.

Exercice 27 : [énoncé]

a) L'application $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ est bien définie et on vérifie aisément $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$ et $N(f + g) \leq N(f) + N(g)$.
 Supposons maintenant $N(f) = 0$, la fonction f est alors solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ vérifiant les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$ ce qui entraîne $f = 0$.
 Finalement N est une norme sur E .
 b) On a évidemment $N \leq \nu$.
 Inversement, soit $f \in E$ et $g = f + f''$. La fonction f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = g$ vérifiant les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$. Après résolution via la méthode de variation des constantes, on obtient $f(x) = \int_0^x \sin(x-t)g(t) dt$. On en déduit $|f(x)| \leq x \|g\|_\infty \leq \pi \|g\|_\infty$ et donc $\|f\|_\infty \leq \pi N(f)$.
 De plus $\|f''\|_\infty \leq \|f + f''\|_\infty + \|f\|_\infty$ donc $\nu(f) \leq (\pi + 1)N(f)$.

Exercice 28 : [énoncé]

a) Si $N(f) = 0$ alors nullité d'une somme de positif $\|f\|_\infty = 0$ et donc $f = 0$.
 $N(f) = 0 \Rightarrow \|f\|_\infty = 0 \Rightarrow f = 0$.
 $N(\lambda f) = \|\lambda f\|_\infty + \|\lambda f'\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty + |\lambda| \|f'\|_\infty = |\lambda| N(f)$.
 $N(f+g) = \|f + g\|_\infty + \|f' + g'\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty = N(f) + N(g)$.
 $\|f\|_\infty \leq N(f)$ donc $\| \cdot \|_\infty$ est dominée par $\| \cdot \|$.
 Pour $f_n(x) = \cos(2n\pi x)$. $\|f_n\|_\infty = 1$ et $N(f_n) = 1 + 2n\pi \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.
 Donc N et $\| \cdot \|_\infty$ ne sont pas équivalentes.
 b) Si $N'(f) = 0$ alors $f(0) = 0$ et $f' = 0$ donc f est constante égale à 0.
 $N'(\lambda f) = |\lambda f(0)| + \|\lambda f'\|_\infty = |\lambda| |f(0)| + |\lambda| \|f'\|_\infty = |\lambda| N'(f)$.
 $N'(f + g) = |f(0) + g(0)| + \|f' + g'\|_\infty \leq |f(0)| + |g(0)| + \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty = N'(f) + N'(g)$.
 Aisément $N'(f) \leq N(f)$.

Pour tout $x \in [0, 1]$,
 $|f(x)| = |f(0) + \int_0^x f'(t)dt| \leq |f(0)| + \int_0^x \|f'\|_\infty \leq |f(0)| + x \|f'\|_\infty \leq N'(f)$.
 Par suite $\|f\|_\infty \leq N'(f)$ puis sachant $\|f'\| \leq N'(f)$ on a $N(f) \leq 2N'(f)$.

Exercice 29 : [énoncé]

Pour tout $f, g \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il est clair que $N_i(f + g) \leq N_i(f) + N_i(g)$ et que $N_i(\lambda f) = |\lambda| N_i(f)$.
 Supposons $N_1(f) = 0$, on a alors $\sup_{x \in [0,1]} |f(x)| = 0$ donc $f = 0$.
 Supposons maintenant que $N_2(f) = 0$, on a alors $\sup_{x \in [0,1]} |f(x) + f'(x)| = 0$ donc $f(x) + f'(x) = 0$. Après résolution de l'équation différentielle sous-jacente, $f(x) = \lambda e^{-x}$ avec $\lambda = f(0) = 0$ et finalement $f = 0$.
 Finalement N_1 et N_2 sont bien deux normes sur E .
 Il est clair que

$$N_2(f) \leq N_1(f)$$

Posons maintenant $M = N_2(f)$. Pour tout $x \in [0, 1]$, on a

$$|f(x) + f'(x)| \leq M$$

donc

$$|(f(x)e^x)'| \leq Me^x$$

d'où

$$|f(x)e^x| = \left| \int_0^x (f(t)e^t)' dt \right| \leq \int_0^x Me^t dt \leq Mex$$

puis $|f(x)| \leq Me$ pour tout $x \in [0, 1]$. Ainsi

$$\sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \leq Me$$

De plus

$$|f'(x)| \leq |f(x) + f'(x)| + |f(x)| \leq M(1 + e)$$

donc

$$\sup_{x \in [0,1]} |f'(x)| \leq M(1 + e)$$

et finalement

$$N_1(f) \leq M(1 + 2e) = N_2(f)(1 + 2e)$$

On peut conclure que les deux normes sont effectivement équivalentes.

Exercice 30 : [énoncé]

a) $\|\cdot\|_\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ est bien définie.

Si $\|f\|_\varphi = 0$ alors la fonction $t \mapsto |f(t)|\varphi(t)$ est nulle. En dehors des valeurs où φ est nulle, la fonction f s'annule. Or φ ne s'annule qu'un nombre fini de fois, donc par un argument de continuité, f s'annule aussi en ces points et finalement $f = \tilde{0}$. Les propriétés $\|\lambda f\|_\varphi = |\lambda| \|f\|_\varphi$ et $\|f + g\|_\varphi \leq \|f\|_\varphi + \|g\|_\varphi$ sont immédiates.

b) Considérons la fonction φ_2/φ_1 . Cette fonction est définie et continue sur le segment $[0, 1]$, elle y est donc bornée et il existe $M \in \mathbb{R}^+$ vérifiant

$\forall x \in [0, 1], \varphi_2(x) \leq M\varphi_1(x)$. On en déduit $\|\cdot\|_{\varphi_1} \leq M \|\cdot\|_{\varphi_2}$. Ainsi $\|\cdot\|_{\varphi_1}$ est dominée par $\|\cdot\|_{\varphi_2}$ et par un argument symétrique $\|\cdot\|_{\varphi_2}$ est dominée par $\|\cdot\|_{\varphi_1}$.

c) On a facilement $\|\cdot\|_{x^2} \leq \|\cdot\|_x$.

Pour $f_n(x) = (1-x)^n$, on a après étude des variations des fonction $x \mapsto x(1-x)^n$ et $x \mapsto x^2(1-x)^n$

$$\|f_n\|_x = \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \sim \frac{e^{-1}}{n}$$

et

$$\|f_n\|_{x^2} = \left(\frac{2}{n+2}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{n+2}\right)^n \sim \frac{e^{-2}}{n^2}$$

donc il n'existe pas de constante $M \geq 0$ telle que $\|\cdot\|_x \leq M \|\cdot\|_{x^2}$. Les deux normes $\|\cdot\|_x$ et $\|\cdot\|_{x^2}$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 31 : [énoncé]

a) $\|\cdot\|_\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ est bien définie.

Si $\|f\|_\varphi = 0$ alors par nullité de l'intégrale d'une fonction continue et positive, $t \mapsto |f(t)|\varphi(t)$ est nulle. En dehors des valeurs où φ est nulle, la fonction f s'annule. Or φ ne s'annule qu'un nombre fini de fois, donc par un argument de continuité, f s'annule aussi en ces points et finalement $f = \tilde{0}$.

Les propriétés $\|\lambda f\|_\varphi = |\lambda| \|f\|_\varphi$ et $\|f + g\|_\varphi \leq \|f\|_\varphi + \|g\|_\varphi$ sont immédiates.

b) Considérons la fonction φ_2/φ_1 . Cette fonction est définie et continue sur le segment $[0, 1]$, elle y est donc bornée et il existe $M \in \mathbb{R}^+$ vérifiant

$\forall x \in [0, 1], \varphi_2(x) \leq M\varphi_1(x)$. On en déduit $\|\cdot\|_{\varphi_1} \leq M \|\cdot\|_{\varphi_2}$. Ainsi $\|\cdot\|_{\varphi_1}$ est dominée par $\|\cdot\|_{\varphi_2}$ et par un argument symétrique $\|\cdot\|_{\varphi_2}$ est dominée par $\|\cdot\|_{\varphi_1}$.

c) On a facilement $\|\cdot\|_{x^2} \leq \|\cdot\|_x$.

Pour $f_n(x) = (1-x)^n$, on a

$$\|f_n\|_x = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

et

$$\|f_n\|_{x^2} = \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

donc il n'existe pas de constante $M \geq 0$ telle que $\|\cdot\|_x \leq M \|\cdot\|_{x^2}$. Les deux normes $\|\cdot\|_x$ et $\|\cdot\|_{x^2}$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 32 : [énoncé]

a) $N_a(1, 1)$ et $N_a(1, -1)$ doivent exister et être strictement positifs. Cela fournit les conditions nécessaires $2a + 2 > 0$ et $2 - 2a > 0$ d'où $a \in]-1, 1[$. Montrons que cette condition est suffisante.

Supposons $a \in]-1, 1[$ et considérons $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi((x, y), (x', y')) = xx' + yy' + axy' + ayx'$$

L'application φ est une forme bilinéaire symétrique sur \mathbb{R}^2 et pour $(x, y) \neq (0, 0)$, $\varphi((x, y), (x, y)) \geq (1 - |a|)(x^2 + y^2) > 0$ en vertu de $|2axy| \leq |a|(x^2 + y^2)$. Ainsi φ est un produit scalaire sur \mathbb{R}^2 et N_a est la norme euclidienne associée.

b) Le cas $a = b$ est immédiat. Quitte à échanger, on peut désormais supposer $a < b$.

Par homogénéité, on peut limiter l'étude de $\frac{N_a(x, y)}{N_b(x, y)}$ au couple $(x, y) = (\cos t, \sin t)$ avec $t \in]-\pi/2, \pi/2]$.

$$\text{Posons } f(t) = \left(\frac{N_a(\cos t, \sin t)}{N_b(\cos t, \sin t)}\right)^2 = \frac{1+a \sin 2t}{1+b \sin 2t}, f'(t) = 2 \frac{(a-b) \cos(2t)}{(1+b \sin 2t)^2}.$$

Les variations de f sont faciles et les extremums de $f(t)$ sont en $t = -\pi/4$ et $t = \pi/4$. Ils valent $\frac{1-a}{1-b}$ et $\frac{1+a}{1+b}$.

On en déduit $\inf_{(x, y) \neq 0} \frac{N_a(x, y)}{N_b(x, y)} = \sqrt{\frac{1-a}{1-b}}$ et $\sup_{(x, y) \neq 0} \frac{N_a(x, y)}{N_b(x, y)} = \sqrt{\frac{1+a}{1+b}}$ (dans le cas $a < b$).

Exercice 33 : [énoncé]

a) Supposons que N_a est une norme sur $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

Pour $m \in \mathbb{N}$, la suite élémentaire $e_m = (\delta_{m, n})_{n \in \mathbb{N}}$ est non nulle donc

$$N_a(e_m) = a_m > 0$$

De plus, pour la suite constante $u = (1)_{n \in \mathbb{N}}$, la quantité $N_a(u)$ existe et donc la série $\sum a_n$ converge.

Inversement, si $\sum a_n$ est une série convergente à termes strictement positifs alors on montre que l'application $N_a : \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ est bien définie et que celle-ci est une norme sur l'espace $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

b) On a aisément $N_a \leq k \|\cdot\|_\infty$ avec $k = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Inversement, supposons $\|\cdot\|_\infty \leq k' N_a$. Pour la suite élémentaire e_m , on obtient $\|e_m\|_\infty \leq k' N_a(e_m)$ et donc $a_m \geq 1/k'$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Cette propriété est incompatible avec la convergence de la série $\sum a_n$.

Ainsi N_a est dominée par $\|\cdot\|_\infty$ mais ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 34 : [énoncé]

a) Les applications sont bien définies $N_i : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ car toute fonction continue sur un segment y est bornée.

Les propriétés $N_i(f + g) \leq N_i(f) + N_i(g)$ et $N_i(\lambda f) = |\lambda| N_i(f)$ sont faciles.

Si $N_1(f) = 0$ alors $f' = 0$ et sachant $f(0) = 0$, on obtient $f = 0$.

Si $N_2(f) = 0$ alors la résolution de l'équation différentielle $f' + f = 0$ avec la condition initiale $f(0) = 0$ donne $f = 0$.

Ainsi les applications N_1, N_2 sont bien des normes sur E .

b) Pour $f \in E$, on a

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt$$

ce qui permet d'établir $\|f\|_\infty \leq \|f'\|_\infty$.

Puisque

$$N_2(f) \leq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \leq 2N_1(f)$$

la norme N_2 est dominée par la norme N_1 .

c) Sachant $f(0) = 0$, on a

$$f(x) = e^{-x} \int_0^x (f(t)e^t)' dt = e^{-x} \int_0^x (f(t) + f'(t))e^t dt$$

donc

$$|f(x)| \leq N_2(f)$$

Puisque

$$|f'(x)| \leq |f(x) + f'(x)| + |f(x)|$$

on obtient

$$|f'(x)| \leq 2N_2(f)$$

et finalement

$$N_1(f) \leq 2N_2(f)$$

Exercice 35 : [énoncé]

Il suffit d'observer

$$(BA)^{n+1} = B(AB)^n A \rightarrow O_p$$

Exercice 36 : [énoncé]

Puisque les matrices A et B commutent, il en est de même des matrices A^k et B^k .

En passant à la limite la relation

$$A^k B^k = B^k A^k$$

on obtient

$$PQ = QP$$

Exercice 37 : [énoncé]

On a

$$A_n A_n^{-1} = I_p$$

En passant cette relation à la limite on obtient

$$AB = I_p$$

Par le théorème d'inversibilité, on peut affirmer que A est inversible et

$$A^{-1} = B$$

Exercice 38 : [énoncé]

Si A est limite d'une suite (M^n) alors $M^{2n} \rightarrow A$ et $M^{2n} = (M^n)^2 \rightarrow A^2$.

Par unicité de la limite, on obtient $A^2 = A$.

Inversement, si $A^2 = A$ alors $A = \lim_{n \rightarrow +\infty} M^n$ avec $M = A$.

Exercice 39 : [énoncé]

$A^{2n} \rightarrow B$ et $A^{2n} = A^n \times A^n \rightarrow B^2$ donc $B = B^2$ et B est une matrice de projection.

Exercice 40 : [énoncé]

a) Il existe $P \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$ tel que $P^{-1}AP = D$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ et $|\lambda_j| < 1$.

On a alors $A^n = PD^nP^{-1}$ avec $D^n = \text{diag}(\lambda_1^n, \dots, \lambda_p^n) \rightarrow O_p$ donc $A^n \rightarrow PO_pP^{-1} = O_p$.

b) En reprenant la démarche qui précède, on peut conclure dès que l'on établit que si T est une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux dans $] -1, 1[$ alors $T^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} O_p$.

Raisonnons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$.

Pour $p = 1$, la propriété est immédiate.

Supposons le résultat vrai au rang $p \geq 1$.

Soit $T \in \mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure à coefficients diagonaux dans $] -1, 1[$.

On peut écrire

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & L \\ O_{n,1} & S \end{pmatrix}$$

avec $|\lambda| < 1$ et $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure à coefficients diagonaux dans $] -1, 1[$.

Par le calcul, on obtient

$$T^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & L_n \\ O_{n,1} & S^n \end{pmatrix}$$

avec

$$L_n = L \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k S^{n-1-k}$$

On a $\lambda^n \rightarrow 0$ et $S^n \rightarrow O_n$ par hypothèse de récurrence.

Pour conclure, il suffit de montrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k S^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{n-1-k} S^k \rightarrow O_n$$

car ceci entraîne $L_n \rightarrow O_{1,n}$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $S^n \rightarrow O_n$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ au-delà duquel $\|S^n\| \leq \varepsilon$.

On alors

$$\left\| \sum_{k=N}^{n-1} \lambda^{n-1-k} S^k \right\| \leq \varepsilon \sum_{k=N}^{n-1} |\lambda|^{n-1-k} \leq \frac{\varepsilon}{1-|\lambda|}$$

De plus, puisque $\sum_{k=0}^{N-1} \lambda^{n-1-k} S^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} O_n$ car somme d'un nombre constant de termes de limites nulles, on peut affirmer que pour n assez grand, on a

$$\left\| \sum_{k=0}^{N-1} \lambda^{n-1-k} S^k \right\| \leq \varepsilon$$

Ainsi, pour n assez grand

$$\left\| \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{n-1-k} S^k \right\| \leq \varepsilon + \frac{\varepsilon}{1-|\lambda|}$$

et on peut conclure.

Récurrence établie.

Exercice 41 : [énoncé]

Posons $r = \text{rg} A_\infty$.

La matrice A_∞ possède est déterminant extrait non nul de taille r .

Le déterminant extrait correspondant des matrices A_n est alors non nul à partir d'un certain rang et donc $\text{rg}(A_n) \geq r$

Exercice 42 : [énoncé]

L'ensemble

$$A = \{k \in \mathbb{R}^+ / \forall x, y \in [a, b], |f(x) - f(y)| \leq k |x - y|\}$$

est une partie de \mathbb{R} , non vide (car f est lipschitzienne) et minorée par 0.

Par suite $N(f) = \inf A$ existe.

Montrons que cet inf est en fait un min.

Pour $x, y \in [a, b]$ distincts, on a pour tout $k \in A$,

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq k$$

En passant à la borne inf, on obtient

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq N(f)$$

puis

$$|f(x) - f(y)| \leq N(f) |x - y|$$

Cette identité est aussi valable quand $x = y$ et donc $N(f) \in A$.

Par conséquent l'application $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ est bien définie.

Supposons $N(f) = 0$.

Pour tout $x \in [a, b]$, $|f(x)| = |f(x) - f(a)| \leq 0 \cdot |x - a|$ donc $f = 0$.

Pour $\lambda = 0$, on a évidemment $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$.

Pour $\lambda \neq 0$:

Pour $x, y \in [a, b]$, l'inégalité

$$|f(x) - f(y)| \leq N(f) |x - y|$$

entraîne

$$|\lambda f(x) - \lambda f(y)| \leq |\lambda| N(f) |x - y|$$

On en déduit $N(\lambda f) \leq |\lambda| N(f)$.

Aussi, l'inégalité

$$|\lambda f(x) - \lambda f(y)| \leq N(\lambda f) |x - y|$$

entraîne

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{N(\lambda f)}{|\lambda|} |x - y|$$

On en déduit $N(f) \leq N(\lambda f)/|\lambda|$ et finalement $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$.

Enfin, pour $x, y \in [a, b]$,

$$|(f + g)(x) - (f + g)(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \leq (N(f) + N(g)) |x - y|$$

donc $N(f + g) \leq N(f) + N(g)$.

Exercice 43 : [énoncé]

a) Soit $x_0 \in A$ et $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in A$, $\|x\| \leq M$.

Pour $f \in \mathcal{L}$, en notant k le rapport de lipschitzianité de f ,

$$\|f(x)\| \leq \|f(x_0)\| + \|f(x) - f(x_0)\| \leq \|f(x_0)\| + k\|x - x_0\| \leq \|f(x_0)\| + 2kM$$

b) L'ensemble K_f est une partie de \mathbb{R} , non vide (car f est lipschitzienne) et minorée par 0.

On en déduit que $c(f) = \inf K_f$ existe dans \mathbb{R}^+ .

Pour $x, y \in A$ distincts, on a pour tout $k \in K_f$

$$\frac{N(f(x) - f(y))}{N(x - y)} \leq k$$

En passant à la borne inférieure, on en déduit

$$\frac{N(f(x) - f(y))}{N(x - y)} \leq c(f)$$

et donc $N(f(x) - f(y)) \leq c(f)N(x - y)$ et cette relation est aussi valable quand $x = y$.

Ainsi $c(f) \in K_f$

c) L'application N_a est bien définie de \mathcal{L} vers \mathbb{R}^+ .

Si $N_a(f) = 0$ alors $c(f) = 0$ et $N(f(a)) = 0$.

Par suite f est constante et $f(a) = 0$ donc f est la fonction nulle.

$$N_a(\lambda f) = c(\lambda f) + |\lambda| N(f(a))$$

$$\text{Montrons } c(\lambda f) = |\lambda| c(f).$$

Pour $\lambda = 0$, la propriété est immédiate.

Pour $\lambda \neq 0$.

Pour tout $x, y \in A$,

$$N(f(x) - f(y)) \leq c(f)N(x - y)$$

donne

$$N(\lambda f(x) - \lambda f(y)) \leq |\lambda| c(f)N(x - y)$$

On en déduit $c(\lambda f) \leq |\lambda| c(f)$.

De façon symétrique, on obtient $c(f) \leq c(\lambda f)/|\lambda|$ et on peut conclure

$$c(\lambda f) = |\lambda| c(f).$$

On en déduit $N_a(\lambda f) = |\lambda| N_a(f)$.

$$N_a(f + g) \leq N(f(a)) + N(g(a)) + c(f + g)$$

Montrons $c(f + g) \leq c(f) + c(g)$.

Pour tout $x, y \in A$,

$$N((f+g)(x) - (f+g)(y)) \leq N(f(x) - f(y)) + N(g(x) - g(y)) \leq (c(f) + c(g)) N(x - y)$$

On en déduit $c(f + g) \leq c(f) + c(g)$ et on peut conclure

$$N_a(f + g) \leq N_a(f) + N_a(g).$$

Finalement N_a est une norme sur \mathcal{L} .

d) $N(f(a)) \leq N(f(b)) + N(f(a) - f(b)) \leq N(f(b)) + \|a - b\| c(f)$.

On en déduit $N_a \leq (1 + \|a - b\|) N_b$ et de façon symétrique,

$$N_a \leq (1 + \|b - a\|) N_a.$$

Exercice 44 : [énoncé]

Pour $u, v \in B(0, 1)$, on a $\|T(u) - T(v)\| = \|u - v\| \leq 2\|u - v\|$.

Pour $u, v \notin B(0, 1)$, on a $\|T(u) - T(v)\| = \left\| \frac{u}{\|u\|} - \frac{v}{\|v\|} \right\| = \frac{\| \|v\|u - \|u\|v \|}{\|u\|\|v\|}$ or

$\| \|v\|u - \|u\|v \| = \|v\|(u - v) + (\|v\| - \|u\|)v$ donc

$\|T(u) - T(v)\| \leq \frac{\|u - v\|}{\|u\|} + \frac{\| \|v\| - \|u\| \|}{\|u\|} \leq 2\|u - v\|$ car $\| \|v\| - \|u\| \| \leq \|v - u\|$ et $\|u\| \geq 1$.

Pour $u \in B(0, 1)$ et $v \notin B(0, 1)$,

$\|T(u) - T(v)\| = \left\| u - \frac{v}{\|v\|} \right\| = \frac{\| \|v\|u - v \|}{\|v\|} = \frac{\| \|v\| - 1 \|u\| + \|u - v\|}{\|v\|} \leq 2\|u - v\|$ car $\| \|v\| - 1 \| = \|v\| - 1 \leq \|v\| - \|u\| \leq \|v - u\|$ et $\|v\| \geq 1$

Exercice 45 : [énoncé]

Si $\|x\|, \|y\| \leq 1$ alors $\|f(y) - f(x)\| = \|y - x\|$.

Si $\|x\| \leq 1$ et $\|y\| > 1$ alors

$$\|f(y) - f(x)\| = \left\| \frac{y}{\|y\|} - x \right\| = \left\| \frac{y}{\|y\|} - y + y - x \right\| \leq \|y\| - 1 + \|y - x\| \leq 2\|y - x\|.$$

Si $\|x\|, \|y\| > 1$ alors $\|f(y) - f(x)\| = \left\| \frac{y}{\|y\|} - \frac{x}{\|x\|} \right\| = \left\| \frac{y - x}{\|y\|} + x \left(\frac{1}{\|y\|} - \frac{1}{\|x\|} \right) \right\| \leq$

$$\frac{\|y - x\|}{\|y\|} + \frac{\| \|x\| - \|y\| \|}{\|y\|} \leq 2\|y - x\|.$$

Au final f est 2-lipschitzienne.

Supposons maintenant que la norme $\| \cdot \|$ soit hilbertienne.

Si $\|x\|, \|y\| \leq 1$ alors $\|f(y) - f(x)\| = \|y - x\|$.

Si $\|x\| \leq 1$ et $\|y\| > 1$ alors $\|f(y) - f(x)\|^2 - \|y - x\|^2 = 1 - \|y\|^2 - 2\frac{\|y\| - 1}{\|y\|} \langle x | y \rangle$.

Or $|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \leq \|y\|$ donc

$$\|f(y) - f(x)\|^2 - \|y - x\|^2 \leq 1 - \|y\|^2 + 2(\|y\| - 1) = -(1 - \|y\|)^2 \leq 0.$$

Si $\|x\|, \|y\| > 1$ alors

$$\|f(y) - f(x)\|^2 - \|y - x\|^2 = 2 - \|y\|^2 - \|x\|^2 - 2\frac{\|x\| \|y\| - 1}{\|x\| \|y\|} \langle x | y \rangle$$

Or $|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ donc

$$\|f(y) - f(x)\|^2 - \|y - x\|^2 = 2 - \|y\|^2 - \|x\|^2 + 2(\|x\| \|y\| - 1) = -(\|x\| - \|y\|)^2 \leq 0.$$

Au final f est 1-lipschitzienne.

Exercice 46 : [énoncé]

a) On écrit $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$ et alors

$$f(x, y) = r(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

b) $f(1/n, 0) \rightarrow 0$ et $f(1/n, 1/n^3) \rightarrow 1$. La fonction f n'a pas de limite en $(0, 0)$.

c) $f(1/n, 0) = 0 \rightarrow 0$ et $f(1/n, 1/n^2) = 1/2 \rightarrow 1/2$. La fonction f n'a pas de limite en $(0, 0)$.

d) $f(1/n, 0) = 0 \rightarrow 0$ et $f(1/n + 1/n^2, 1/n) = \frac{1/n^2 + 1/n^3}{1/n^2} \rightarrow 1$. La fonction f n'a pas de limite en $(0, 0)$.

Exercice 47 : [énoncé]

a) $f(x, y) = \exp(y \ln x)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+\ast} \times \mathbb{R}^{+\ast}$ par opérations sur les fonctions continues.

Il reste à étudier la continuité aux points $(0, b)$ avec $b > 0$.

Quand $(x, y) \rightarrow (0, b)$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^{+\ast} \times \mathbb{R}^{+\ast}$ on a $y \ln x \rightarrow -\infty$ et donc $f(x, y) = x^y \rightarrow 0$.

D'autre part, quand $(0, y) \rightarrow (0, b)$, on a $f(x, y) = 0 \rightarrow 0$.

Ainsi f est continue en $(0, b)$.

b) Si l'on peut prolonger f par continuité à $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ alors

d'une part $f(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0$ et d'autre part $f(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 1$.

C'est absurde.

Exercice 48 : [énoncé]

La partie $\{\|x - a\| / a \in A\}$ est une partie de \mathbb{R} non vide et minorée par 0 donc sa borne inférieure existe. Ainsi l'application $x \mapsto d(x, A)$ est bien définie.

Soient $x, x' \in E$. Pour tout $y \in A$, $\|x - y\| \leq \|x - x'\| + \|x' - y\|$ donc

$d(x, A) \leq \|x - x'\| + \|x' - y\|$ puis $d(x, A) - \|x - x'\| \leq \|x' - y\|$ et

$d(x, A) - \|x - x'\| \leq d(x', A)$. Ainsi $d(x, A) - d(x', A) \leq \|x - x'\|$ et par symétrie

$|d(x, A) - d(x', A)| \leq \|x - x'\|$. Finalement $x \mapsto d(x, A)$ est 1 lipschitzienne donc continue.

Exercice 49 : [énoncé]

a) Soit $f : t \mapsto g(R \cos t, R \sin t)$. f est continue et 2π périodique.

Soit $h : t \mapsto f(t + \pi) - f(t)$. h est continue et $h(0) + h(\pi) = f(2\pi) - f(0) = 0$ donc h s'annule.

b) Soit $h : t \mapsto f(t + \pi/2) - f(t)$. h est continue et $h(0) + h(\pi/2) + h(\pi) + h(3\pi/2) = 0$ donc h s'annule.

Exercice 50 : [énoncé]

Soit $\varphi : U \rightarrow U$ morphisme continue. L'application $\theta \in \mathbb{R} \rightarrow \varphi(e^{i\theta})$ est continue et à valeurs dans U donc par le théorème de relèvement, il existe une fonction $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue vérifiant $\varphi(e^{i\theta}) = e^{i\psi(\theta)}$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Puisque φ est un morphisme, on obtient : $\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}, \psi(\theta + \theta') - (\psi(\theta) + \psi(\theta')) \in 2\pi\mathbb{Z}$. Or l'application $(\theta, \theta') \mapsto \psi(\theta + \theta') - (\psi(\theta) + \psi(\theta'))$ est continue sur le connexe \mathbb{R}^2 , son image est donc connexe et cette application est donc constante. Sans perte de généralités, on peut désormais supposer $\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}, \psi(\theta + \theta') = \psi(\theta) + \psi(\theta')$. L'application ψ apparaît désormais comme étant un endomorphisme continu de $(\mathbb{R}, +)$ dans lui-même, il est alors connu qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}, \psi(\theta) = a\theta$. De plus, puisque $\varphi(e^{2i\pi}) = 1$, $a \in \mathbb{Z}$ et finalement $\varphi : z \rightarrow z^a$ pour un certain $a \in \mathbb{Z}$. Réciproquement ces applications sont des endomorphismes continus de (U, \times) .

Exercice 51 : [énoncé]

$\forall \lambda \in \text{Sp}(u), \exists x \neq 0, u(x) = \lambda x$ et donc $|\lambda| \|x\| \leq \|u(x)\| \leq \|u\| \|x\|$ puis $|\lambda| \leq \|u\|$ avec $\|x\| \neq 0$.

Exercice 52 : [énoncé]

Notons $\|\cdot\|$ la norme induite sur $\mathcal{L}\mathcal{C}(E, F)$ par les normes existant sur E et F .

$\|f_n(x_n) - f(x)\|_F \leq \|f_n(x_n) - f_n(x)\|_F + \|f_n(x) - f(x)\|_F$ avec

$\|f_n(x_n) - f_n(x)\|_F \leq \|f_n\| \|x_n - x\|_E \rightarrow 0$ (car $\|f_n\|$ est bornée) et

$\|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \|f_n - f\| \|x\|_E \rightarrow 0$ donc $\|f_n(x_n) - f(x)\|_F \rightarrow 0$.

Exercice 53 : [énoncé]

Par contraposée. Supposons que f ne soit pas continue., l'application linéaire f n'est donc pas continue en 0 et par suite il existe $\varepsilon > 0$ vérifiant

$\forall \alpha > 0, \exists x \in E, \|x\| \leq \alpha$ et $\|f(x)\| > \varepsilon$.

Pour $\alpha = 1/n$, il existe $x_n \in E$ tel que $\|x_n\| \leq 1/n$ et $\|f(x_n)\| > \varepsilon$.

Considérons alors $y_n = \sqrt{n}x_n$.

On a $\|y_n\| = 1/\sqrt{n}$ donc $y_n \rightarrow 0$ et $\|f(y_n)\| > \sqrt{n}\varepsilon \rightarrow +\infty$.

Ainsi (y_n) est une suite convergeant vers 0 dont la suite image $(f(y_n))$ n'est pas bornée.

Exercice 54 : [énoncé]

La continuité de l'application linéaire Id_E de (E, N_1) vers (E, N_2) équivaut à l'existence d'un réel $\alpha \geq 0$ vérifiant $N_2(x) \leq \alpha N_1(x)$ pour tout $x \in E$. La propriété annoncée est alors immédiate.

Exercice 55 : [énoncé]

Pour tout $x \in E$ tel que $\|x\|_E < 1$, on a $\|u(x)\|_F \leq \|u\| \|x\|_E \leq \|u\|$ donc $s = \sup_{\|x\|_E < 1} \|u(x)\|_F \leq \|u\|$.

Pour tout $x \in E$ tel que $\|x\|_E = 1$, on a $\left\| \frac{n}{n+1}x \right\|_E < 1$ donc $\left\| u \left(\frac{n}{n+1}x \right) \right\|_F \leq s$ puis $\|u(x)\|_F \leq \frac{n+1}{n}s$. A la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on obtient $\|u(x)\|_F \leq s$ d'où l'on déduit $\|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\| \leq s$ puis l'égalité annoncée.

Exercice 56 : [énoncé]

a) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ en écrivant

$$u \circ v^{n+2} - v^{n+2} \circ u = (u \circ v^{n+1}) \circ v - v^{n+2} \circ u$$

puis

$$u \circ v^{n+2} - v^{n+2} \circ u = (n+1)\alpha v^{n+1} + v^{n+1} \circ u \circ v - v^{n+2} \circ u$$

et en simplifiant via

$$v^{n+1} \circ u \circ v - v^{n+2} \circ u = v^{n+1}(u \circ v - v \circ u)$$

b)

$$\|(n+1)\alpha v^n\| \leq \|u\| \|v^{n+1}\| + \|v^{n+1}\| \|u^n\|$$

donc

$$(n+1)|\alpha| \|v^n\| \leq (\|u\| \|v\| + \|v\| \|u\|) \|v^n\|$$

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v^n \neq 0$ alors on obtient $(n+1)|\alpha| \leq 2\|u\| \|v\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui implique $\alpha = 0$.

S'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $v^n = 0$, alors pour le plus petit de ces entiers $v^{n-1} \neq 0$ et $v^n = 0$ et la relation

$$u \circ v^n - v^n \circ u = (n+1)\alpha v^{n-1}$$

permet de conclure $\alpha = 0$.

Exercice 57 : [énoncé]

a) L'ensemble $K = \{a \in E / \|a\| = 1\}$ est une partie compacte non vide de E (car fermée et bornée en dimension finie). L'application $x \mapsto \|ax\|$ y est (continue car $x \mapsto ax$ est linéaire et $\|\cdot\|$ est continue) donc elle y admet un maximum dont la valeur est le sup en question.

b) $N : E \rightarrow \mathbb{R}$. Si $N(x) = 0$ alors $\forall a \in K, \|ax\| = 0$. Posons $a = \frac{1}{\|1_E\|} 1_E$. $a \in K$ donc $ax = 0$ d'où $x = 0$.

$N(\lambda x) = \sup_{\|a\|=1} \|a(\lambda x)\| = \sup_{\|a\|=1} |\lambda| \|ax\| = |\lambda| \sup_{\|a\|=1} \|ax\| = |\lambda| N(x)$ et $N(x+y) = \sup_{\|a\|=1} \|a(x+y)\| \leq \sup_{\|a\|=1} (\|ax\| + \|ay\|) \leq \sup_{\|a\|=1} \|ax\| + \sup_{\|a\|=1} \|ay\| = N(x) + N(y)$.
 Pour $a \in K, \|ax\| \leq N(x) \|a\|$ et cette propriété s'étend à $a \in E$ par homogénéité.
 Pour $a \in K, \|xya\| \leq N(x) \|ya\| \leq N(x)N(y) \|a\| = N(x)N(y)$ donc $N(xy) \leq N(x)N(y)$.

Exercice 58 : [énoncé]

Pour tout $y \in \ker f, |f(x)| = |f(x) - f(y)| \leq \|f\| \|x - y\|$ donc

$$|f(x)| \leq \|f\| d(x, \ker f).$$

Pour $z \in E$, on peut écrire $z = \lambda x + y$ avec $y \in H$ et $\lambda = f(z)/f(x)$.

Si $\lambda \neq 0$ alors $z = \lambda(x + y/\lambda)$ donc $\|z\| \geq |\lambda| d(x, H)$ puis

$$|f(z)| = |\lambda| |f(x)| \leq \frac{|f(x)|}{d(x, H)} \|z\|$$

Cette inégalité vaut encore quand $\lambda = 0$ et cela permet d'affirmer $\|f\| \leq \frac{|f(x)|}{d(x, H)}$ puis l'inégalité complémentaire de la précédente.

Exercice 59 : [énoncé]

Considérons $\alpha_0, \dots, \alpha_d$ des réels deux à deux distincts et $\varphi : \mathbb{R}_d[X] \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ définie par $\varphi(P) = (P(\alpha_0), \dots, P(\alpha_d))$. φ est un isomorphisme de \mathbb{R} -espace vectoriel de dimensions finies, c'est donc une application linéaire continue car les espaces engagés sont de dimensions finies) et il en est de même de φ^{-1} .

En notant f la limite simple de (f_n) , on a $\varphi(f_n) \rightarrow (f(\alpha_0), \dots, f(\alpha_d))$. En notant P l'élément de $\mathbb{R}_d[X]$ déterminé par $\varphi(P) = (f(\alpha_0), \dots, f(\alpha_d))$, on peut écrire $\varphi(f_n) \rightarrow \varphi(P)$. Par continuité de l'application φ^{-1} , on a donc $f_n \rightarrow P$ dans $\mathbb{R}_d[X]$. En choisissant sur $\mathbb{R}_d[X]$, la norme $\|\cdot\|_{\infty, [a, b]}$, on peut affirmer que f_n converge uniformément vers P sur tout compact. En particulier f_n converge simplement vers P et en substance $P = f$.

Exercice 60 : [énoncé]

a) On observe que $|e^{-t}f(x+t)| \leq \|f\|_{\infty} e^{-t}$. Cette domination permet d'affirmer que $G(f)$ est définie et continue sur \mathbb{R} . La 2π -périodicité de $G(f)$ est évidente et la linéarité de l'application $f \mapsto G(f)$ l'est aussi. Ainsi G est un endomorphisme de E . De plus, $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |G(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} |f(x+t)| dt \right) dx$.

On peut appliquer le théorème de Fubini et affirmer

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |G(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\int_0^{2\pi} |f(x+t)| dx \right) dt$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x+t)| dx = \|f\| \text{ car } f \text{ est } 2\pi\text{-périodique. Ainsi}$$

$$\|G(f)\| \leq \int_0^{+\infty} e^{-t} \|f\| dt = \|f\| \text{ ce qui donne la continuité de l'endomorphisme } G.$$

b) Etudions les coefficients de Fourier des fonctions f et $G(f)$.

$$\text{Pour } n \in \mathbb{Z}, c_n(G(f)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} f(x+t) e^{-inx} dt \right) dx.$$

On peut appliquer le théorème de Fubini et affirmer

$$c_n(G(f)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-t} e^{int} \left(\int_0^{2\pi} f(x+t) e^{-in(x+t)} dx \right) dt$$

$$\text{Ce qui donne } c_n(G(f)) = c_n(f) \int_0^{+\infty} e^{(in-1)t} dt = \frac{c_n(f)}{in-1}.$$

La fonction $g : x \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{1+|n|^{3/2}}$ est élément de E , s'il existe $f \in E$ vérifiant

$$G(f) = g \text{ alors } c_n(f) = \frac{(in-1)}{1+|n|^{3/2}} \text{ d'où } |c_n(f)|^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \text{ ce qui est incompatible avec}$$

la convergence de la série $\sum |c_n(f)|^2$. Ainsi la fonction G n'est pas surjective.

c) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in E$. Si $G(f) = \lambda f$ alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\frac{c_n(f)}{in-1} = \lambda c_n(f)$.

Si $\lambda \notin \left\{ \frac{1}{in-1} / n \in \mathbb{Z} \right\}$ alors une solution à l'équation $G(f) = \lambda f$ vérifie $c_n(f) = 0$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et donc $\|f\| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = 0$ donne $f = 0$.

S'il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ vérifiant $\lambda = \frac{1}{in_0-1}$ alors pour tout $n \neq n_0$ alors $c_n(f) = 0$.

Posons alors $g : x \mapsto f(x) - c_{n_0}(f) e^{in_0 x} \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(g) = 0$ donc $g = 0$ puis $f : x \mapsto c_{n_0}(f) e^{in_0 x}$. La réciproque est immédiate.

Finalement $\text{Sp}G = \left\{ \frac{1}{in-1} / n \in \mathbb{Z} \right\}$ et $E_{1/(in-1)}(G) = \text{Vect}(x \mapsto e^{inx})$.

Exercice 61 : [énoncé]

Soit $x \in \ker(u - \text{Id}) \cap \text{Im}(u - \text{Id})$.

On peut écrire $x = u(a) - a$ pour un certain $a \in E$ et on a $u(x) = x$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la propriété $u^k(x) = x$ donne

$$u^{k+1}(a) - u^k(a) = x$$

En sommant ces relations pour k allant de 0 jusqu'à $n - 1$, on obtient

$$u^n(a) - a = nx$$

et donc

$$\|x\| = \frac{1}{n} \|u^n(a) - a\| \leq \frac{1}{n} (\|u^n(a)\| + \|a\|) \leq \frac{2}{n} \|a\| \rightarrow 0$$

Ainsi $x = 0$ et donc $\ker(u - \text{Id}) \cap \text{Im}(u - \text{Id}) = \{0\}$.

De plus, par la formule du rang

$$\dim \ker(u - \text{Id}) + \dim \text{Im}(u - \text{Id}) = \dim E$$

et donc les deux espaces $\ker(u - \text{Id})$ et $\text{Im}(u - \text{Id})$ sont supplémentaires.

Exercice 62 : [énoncé]

a) Pour tout $u \in \ell^\infty(\mathbb{R})$, on a $|T(u)_n| \leq N_\infty(u)$ et $|\Delta(u)| \leq 2N_\infty(u)$ donc $T(u), \Delta(u) \in \ell^\infty(\mathbb{R})$. Les applications T et Δ sont bien à valeurs dans $\ell^\infty(\mathbb{R})$, de plus elles sont clairement linéaires et $N_\infty(T(u)) \leq N_\infty(u)$ et $N_\infty(\Delta(u)) \leq 2N_\infty(u)$ donc elles sont aussi continues.

b) Par l'étude qui précède on a déjà $\|T\| \leq 1$ et $\|\Delta\| \leq 2$. Pour $u = (1)$, on a $N_\infty(u) = 1$ et $N_\infty(T(u)) = 1$ donc $\|T\| = 1$. Pour $u = ((-1)^n)$, on a $N_\infty(u) = 1$ et $N_\infty(\Delta(u)) = 2$ donc $\|\Delta\| = 2$.

Exercice 63 : [énoncé]

a) L'application T est bien définie et est clairement linéaire. Pour tout $x \in [0, 1]$, $|T(f)(x)| \leq xN_1(f)$ donc $N_2(T(f)) = \|T(f)\|_\infty + \|f\|_\infty \leq 2N_1(f)$. Ainsi T est continue.

b) Par l'étude ci-dessus, on a déjà $\|T\| \leq 2$. Pour $f(t) = 1$, on a $N_1(f) = 1$, $T(f)(x) = x$ et donc $N_2(T(f)) = 2$. Ainsi $\|T\| = 2$.

Exercice 64 : [énoncé]

Pour tout $f \in E$, $|\varphi(f)| \leq |f(1)| + |f(0)| \leq 2\|f\|_\infty$ donc φ est continue et $\|\varphi\| \leq 2$. Pour $f : x \mapsto 2x - 1$, $f \in E$, $\|f\|_\infty = 1$ et $u(f) = 2$ donc

$$\|\varphi\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\varphi(f)| = \max_{\|f\| \leq 1} |u(f)| = 2.$$

Exercice 65 : [énoncé]

$T_\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ est bien définie et est clairement linéaire. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|T_\varphi(f)| \leq \|\varphi\|_2 \|f\|_2$ donc T_φ est continue et $\|T_\varphi\| \leq \|\varphi\|_2$. De plus pour $f = \varphi$, $|T_\varphi(f)| = \|\varphi\|_2 \|f\|_2$ donc $\|T_\varphi\| = \|\varphi\|_2$.

Exercice 66 : [énoncé]

Pour tout $f \in E$, $|\varphi(f)| = \int_0^1 |tf(t)| dt \leq \|f\|_1$ donc φ est continue et $\|\varphi\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\varphi(f)| \leq 1$.

Pour $f : t \mapsto t^n$, $\|f\|_1 = \frac{1}{n+1}$ et $|\varphi(f)| = \int_0^1 t^{n+1} dt = \frac{1}{n+2}$ donc $\frac{|\varphi(f)|}{\|f\|_\infty} = \frac{n+1}{n+2} \rightarrow 1$ d'où $\|\varphi\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\varphi(f)| = 1$.

Exercice 67 : [énoncé]

- a) $\|u(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty + |f(0)| \leq 2\|f\|_\infty$ donc u est continue et $\|u\| \leq 2$. Pour $f : x \mapsto 2x - 1$, on a $\|f\|_\infty = 1$ et $\|u(f)\|_\infty = 2$ donc $\|u\| = 2$.
 b) Pour $f : x \mapsto (n+1)(1-x)^n$, $\|f\|_1 = 1$ et $\|u(f)\|_1 = \int_0^1 (n+1) - (n+1)(1-x)^n dx = n \rightarrow +\infty$.

Exercice 68 : [énoncé]

- a) $N_1, N_2 : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$.

$$N_1(P+Q) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0) + Q^{(k)}(0)| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| + |Q^{(k)}(0)| =$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| + \sum_{k=0}^{+\infty} |Q^{(k)}(0)| = N_1(P) + N_1(Q),$$

$$N_1(\lambda P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |\lambda P^{(k)}(0)| = |\lambda| \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| = |\lambda| N_1(P),$$

$$N_1(P) = 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, P^{(k)}(0) = 0 \text{ or } P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k \text{ donc } P = 0.$$

Finalement N_1 est une norme.

- $$N_2(P+Q) = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t) + Q(t)| \leq \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)| + |Q(t)| \leq$$

$$\sup_{t \in [-1,1]} |P(t)| + \sup_{t \in [-1,1]} |Q(t)| = N_2(P) + N_2(Q),$$

$$N_2(\lambda P) = \sup_{t \in [-1,1]} |\lambda P(t)| = \sup_{t \in [-1,1]} |\lambda| |P(t)| = |\lambda| \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)| = |\lambda| N_2(P),$$

$$N_2(P) = 0 \Rightarrow \forall t \in [-1,1], P(t) = 0 \text{ et par infinité de racines } P = 0.$$

b) Notons $D : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ l'opération de dérivation.

- $$\forall P \in \mathbb{R}[X], N_1(D(P)) = \sum_{k=0}^{+\infty} |D(P)^{(k)}(0)| = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k+1)}(0)| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| =$$

$$N_1(P) \text{ donc } D \text{ est continue pour la norme } N_1 \text{ et } \|D\| \leq 1. \text{ Pour } P = X, \text{ on a}$$

$$N_1(P) = 1 \text{ et } N_1(D(P)) = 1 \text{ donc } \|D\| = 1.$$

- c) Soit $P_n = X^n$. On a $D(P_n) = nX^{n-1}$ donc $N_2(P_n) = 1$ et $N_2(D(P_n)) = n \rightarrow +\infty$.

Par suite D n'est pas continue pour N_2 .

d) Par ce qui précède, les normes ne sont pas équivalentes. Néanmoins

- $$P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k \text{ donc } |P(t)| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|P^{(k)}(0)|}{k!} \leq N_1(P) \text{ donc } N_2(P) \leq N_1(P).$$

C'est là la seule et la meilleure comparaison possible.

Exercice 69 : [énoncé]

- $T_\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ est bien définie et est clairement linéaire. Par l'inégalité $|T_\varphi(f)| \leq \int_0^1 |\varphi(t)| dt \|f\|_\infty$ donc T_φ est continue et $\|T_\varphi\| \leq \int_0^1 |\varphi(t)| dt$. Pour tout

- $\varepsilon > 0$, posons $f_\varepsilon = \frac{\varphi}{|\varphi| + \varepsilon}$. On observe que $\|f_\varepsilon\|_\infty \leq 1$ et que $T_\varphi(f_\varepsilon) = \int_0^1 \frac{\varphi^2(t)}{|\varphi(t)| + \varepsilon} dt$. On observe que $\left| T_\varphi(f_\varepsilon) - \int_0^1 |\varphi(t)| dt \right| \leq \int_0^1 \frac{\varepsilon |\varphi(t)|}{|\varphi(t)| + \varepsilon} dt \leq \varepsilon$ donc $T_\varphi(f_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 |\varphi(t)| dt$. Or $|T_\varphi(f_\varepsilon)| \leq \|T_\varphi\| \|f_\varepsilon\|$ donc on en déduit que $\|T_\varphi\| \geq \int_0^1 |\varphi(t)| dt$ et finalement $\|T_\varphi\| = \int_0^1 |\varphi(t)| dt$.

Exercice 70 : [énoncé]

- u est clairement un endomorphisme de E .
 $u(f)(x) = (1-x)f(0) + xf(1)$ donc $|u(f)(x)| \leq (1-x)|f(0)| + x|f(1)| \leq (1-x)\|f\|_\infty + x\|f\|_\infty = \|f\|_\infty$.
 Ainsi $\|u(f)\| \leq \|f\|$. L'endomorphisme u est continu et $\|u\| \leq 1$.
 Pour $f : x \mapsto 1$, on a $\|f\|_\infty = 1$ et $\|u(f)\|_\infty = 1$ donc $\|u\| \geq 1$ puis $\|u\| = 1$.

Exercice 71 : [énoncé]

- a) Les primitives de f sont de la forme $\varphi + C^{te}$ avec $\varphi : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$. Parmi celles-ci une seule est d'intégrale nulle c'est

$$F = \varphi - \int_0^1 \varphi(t) dt$$

- b) L'application u est bien définie de E vers E car une primitive est une fonction continue. Pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in E$, $(\lambda u(f) + \mu u(g))' = \lambda f + \mu g$ et $\int_0^1 \lambda u(f) + \mu u(g) = 0$ donc $u(\lambda f + \mu g) = \lambda u(f) + \mu u(g)$. Ainsi u est un endomorphisme.

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt - \int_0^1 \left(\int_0^t f(u) du \right) dt$$

donc aisément $|F(x)| \leq 2\|f\|_\infty$ puis $\|F\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty$. Ainsi u est continu.

c)

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt - \int_0^1 \left(\int_0^t f(u) du \right) dt$$

et par intégration d'une constante

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^1 \left(\int_0^x f(t) dt \right) du$$

On conclut par la linéarité et la relation de Chasles.

d) On a

$$|F(x)| \leq \int_0^1 |x-t| \|f\|_\infty dt$$

et en découpant l'intégrale en x , on obtient

$$\int_0^1 |x-t| dt = x^2 - x + \frac{1}{2}$$

donc

$$|F(x)| \leq \frac{1}{2} \|f\|_\infty$$

puis $\|F\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|f\|_\infty$ car $\sup_{x \in [0,1]} (x^2 - x + 1/2) = \frac{1}{2}$. Ainsi $\|u\| \leq 1/2$.

Enfin pour $f : x \mapsto 1$, $\|f\|_\infty = 1$, $F : x \mapsto x - 1/2$ et $\|F\|_\infty = 1/2$ donc $\|u\| = 1/2$

Exercice 72 : [énoncé]

a) On a $|a_n u_n| \leq \|a\|_\infty |u_n|$ et $\sum |u_n|$ converge donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum a_n u_n$ est absolument convergente et donc convergente.

b) $|\langle a, u \rangle| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n u_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|a\|_\infty |u_n| = \|a\|_\infty \|u\|_1$.

On en déduit que φ_u est continue et $\|\varphi_u\| \leq \|u\|_1$.

Soit a la suite bornée déterminée par $a_n = 1$ si $u_n \geq 0$ et $a_n = -1$ sinon.

On a $\|a\|_\infty = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n u_n = |u_n|$ de sorte que

$$\varphi_u(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = \|u\|_1.$$

On en déduit que $\|\varphi_u\| = \|u\|_1$.

c) Par l'inégalité $|\langle a, u \rangle| \leq \|a\|_\infty \|u\|_1$, on obtient que ψ_a est continue et $\|\psi_a\| \leq \|a\|_\infty$.

Pour la suite $u_k = (\delta_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$, on a $\|u_k\|_1 = 1$ et $\psi_a(u_k) = a_k$ donc $|a_k| \leq \|\psi_a\|$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Par suite $\|a\|_\infty \leq \|\psi_a\|$ puis finalement $\|\psi_a\| = \|a\|_\infty$.

Exercice 73 : [énoncé]

a) Si $f \in E$ alors $\phi f \in E$ car

$$|\phi(t)f(t)|^2 \leq \|\phi\|_\infty |f(t)|^2$$

De plus, l'application u est évidemment linéaire et donc u est un endomorphisme de E .

De plus

$$\|\phi f\|_2 \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \|\phi\|_\infty |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq \|\phi\|_\infty \|f\|_2$$

donc l'endomorphisme u est continu et

$$\|u\| \leq \|\phi\|_\infty$$

b) Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la fonction g est continue, il existe $\alpha > 0$ vérifiant

$$|x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| \leq \varepsilon$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, on a $1/n \leq \alpha$ et alors

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} f_n^2(x)g(x) dx - g(x_0) \int_{\mathbb{R}} f_n^2(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |g(x) - g(x_0)| f_n^2(x) dx$$

donne

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} f_n^2(x)g(x) dx - g(x_0) \int_{\mathbb{R}} f_n^2(x) dx \right| \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}} f_n^2(x) dx$$

et donc

$$\left| \frac{\int_{\mathbb{R}^2} f_n^2(x)g(x) dx}{\int_{\mathbb{R}} f_n^2(x) dx} - g(x_0) \right| \leq \varepsilon$$

c) On sait déjà $\|u\| \leq \|\phi\|_\infty$. En appliquant le résultat qui précède avec $g = \phi^2$, on obtient

$$\frac{\|f_n \phi\|_2}{\|f_n\|_2} \rightarrow |\phi(x_0)|$$

et donc $\|u\| \geq |\phi(x_0)|$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$. On peut alors affirmer $\|u\| \geq \|\phi\|_\infty$ puis l'égalité

Exercice 74 : [énoncé]

a) Pour $f \in E$,

$$|u(f)(x)| \leq \int_0^x t \|f\|_\infty dt = \frac{1}{2} x^2 \|f\|_\infty$$

donc

$$\|v(f)\|_1 \leq \int_0^1 \frac{1}{2} x^2 \|f\|_\infty dx = \frac{1}{6} \|f\|_\infty$$

On en déduit que l'application linéaire v est continue et

$$\|v\| \leq 1/6$$

En prenant $f = \tilde{1}$, on a

$$\|f\|_\infty = 1, u(f) : x \mapsto \frac{1}{2} x^2 \text{ et } \|v(f)\|_1 = 1/6$$

On en déduit $\|v\| = 1/6$.

b) Pour $f \in E$,

$$|u(f)(x)| = \int_0^x t |f(t)| dt \leq \int_0^x |f(t)| dt \leq \|f\|_1$$

donc

$$\|w(f)\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |u(f)(x)| \leq \|f\|_1$$

On en déduit que l'application linéaire w est continue et $\|w\| \leq 1$.

Pour $f_n(t) = t^n$, on a

$$\|f_n\|_1 = 1/(n+1), u(f_n)(x) = \frac{1}{n+2} x^{n+2} \text{ et } \|w(f_n)\|_\infty = \frac{1}{n+2}$$

Puisque

$$\frac{\|w(f_n)\|_\infty}{\|f_n\|_1} = \frac{n+1}{n+2} \rightarrow 1$$

on obtient $\|w\| = 1$

Exercice 75 : [énoncé]

Notons que $f(2 \times 0) = 2 \times f(0)$ implique $f(0) = 0$.

On a

$$f(x) = f(2 \times x/2) = 2f(x/2)$$

Par récurrence

$$f(x) = 2^n f(x/2^n)$$

Donc

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x/2^n) - f(0)}{x/2^n} \rightarrow f'(0)$$

puis

$$f(x) = f'(0)x$$

Exercice 76 : [énoncé]

Un tel résultat est déjà connu pour les fonctions à valeurs réelles par application du théorème des accroissements finis. En raisonnant via parties réelles et imaginaires on peut étendre ce résultat au cas d'une fonction complexe. En raisonnant via les fonctions coordonnées, on prolonge ce résultat aux fonctions à valeurs dans E .

Exercice 77 : [énoncé]

Notons $A(x) = (a_{i,j}(x)) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont $D_n(x)$ est le déterminant. La fonction $x \mapsto A(x)$ est dérivable car ses fonctions coordonnées le sont et par multilinéarité du déterminant, la fonction D_n est dérivable avec $D'_n = \det(C'_1, C_2, \dots, C_n) + \det(C_1, C'_2, \dots, C_n) + \dots + \det(C_1, C_2, \dots, C'_n) = 0 + \det(C_1, C_2, \dots, C'_n)$.

En développant par rapport à la dernière colonne ce dernier déterminant, on obtient : $D'_n(x) = D_{n-1}(x)$. Sachant $D_n(0) = 0$ et $D_1(x) = x$ on peut conclure, par récurrence, $D_n(x) = \frac{x^n}{n!}$.

Exercice 78 : [énoncé]

a) Procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $n = 1$, $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0$ et $\sum_{k=0}^n (-1)^k k \binom{n}{k} = -1$.

Supposons la propriété établie au rang $n \geq 1$.

Pour $0 \leq p < n+1$.

Si $p = 0$ alors $\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} k^p = (1-1)^{n+1} = 0$.

Si $0 < p < n+1$ alors $\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} k^p = (n+1) \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \binom{n}{k-1} k^{p-1} =$

$(n+1) \sum_{k=0}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (k+1)^{p-1} = 0$ après développement du $(k+1)^{p-1}$.

Si $p = n+1$ alors

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} k^{n+1} = (n+1) \sum_{k=0}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (k+1)^n = (-1)^{n+1} (n+1)!$$

Récurrence établie.

b) Par Taylor Young : $f(x) = \sum_{p=0}^n \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p + o(x^n)$ donc

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(kh) = \sum_{p=0}^n \frac{f^{(p)}(0)}{p!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k^p + o(h^n) \rightarrow (-1)^n f^{(n)}(0).$$

Exercice 79 : [énoncé]

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ via :

$$(t^n f(1/t))^{(n+1)} = (t \times t^{n-1} f(1/t))^{(n+1)} =$$

$$t \times \left((t^{n-1} f(1/t))^{(n)} \right)' + (n+1) (t^{n-1} f(1/t))^{(n)}$$

en vertu de la formule de Leibniz puis $(t^n f(1/t))^{(n+1)} =$

$t \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{t^{n+2}} f^{(n)}(1/t) + t \frac{(-1)^n}{t^{n+1}} \frac{-1}{t^2} f^{(n+1)}(1/t) + (n+1) \frac{(-1)^n}{t^{n+1}} f^{(n)}(1/t)$ et la formule attendue après simplification.

Exercice 80 : [énoncé]

Par la dérivabilité à droite de f en 0, on peut écrire

$$f(x) = f(0) + x.f'(0) + x\varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon \xrightarrow[0^+]{}$ 0.

Puisque $f(0) = 0$, on obtient

$$S_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k.f'(0) + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k.\varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

En exploitant

$$\left\| \varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right) \right\| \leq \max_{]0,1/n]} \|\varepsilon\|$$

et

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

on obtient

$$\left\| S_n - \frac{n+1}{2n} f'(0) \right\| \leq \frac{n+1}{2n} \max_{]0,1/n]} \|\varepsilon\|$$

Or $\varepsilon \xrightarrow[0^+]{}$ 0 donc $\max_{]0,1/n]} \|\varepsilon\| \rightarrow 0$ puis

$$S_n \rightarrow \frac{1}{2} f'(0)$$

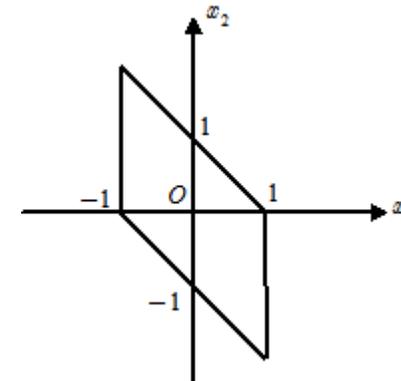


FIGURE 1 – La boule unité fermée pour la norme N